

PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 5

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

CONTENTS

- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "Some explicit formulae, of use in the calculation of arbitrarily loaded, thin-walled cylinders", p. 505.
- BLAAUW, A. H.: "On the Relation between Flower-formation and Temperature". I. (Bulbous Irises), p. 513.
- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "Introductory note on the phylogenetic and ontogenetic development of the Cortex cerebri", p. 521.
- BRUMMELKAMP, R.: "Equal distribution of the neo-cortical nucleus mass and equal growth intensity of the neo-cortex. (The significance of neurobiotaxis for this problem)". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS). (With one plate), p. 529.
- KLEYN, A. DE: "Déviations des différentes formes de nystagmus dans le système nerveux central". III, p. 540.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du huitième nerf crânien". I. (With one plate), p. 547.
- BOSCH, J. C. VAN DEN, and P. F. A. KLINKENBERG: "Some Observations on the Spectra of Germanium". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN). (With one plate), p. 556.
- BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Vierte Mitteilung). Der WEIERSTRASSsche Unbestimmtheitssatz. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 563.
- LOONSTRA, F.: "Die LIESchen Fundamentalsätze in bewerteten Körpern". (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 568.
- LOONSTRA, F.: "Folgen und Reihen in bewerteten Körpern". (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 577.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Fünfte Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 590.
- MEIJER, C. S.: "Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen und ihre Produkte". (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 599.

- VEEN, S. C. VAN: "Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrales erster Art in der Nähe von $k=1$ ". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 606.
- VEEN, S. C. VAN: "Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von $k=1$ ". II. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 614.
- WOLFF, J.: "Séries se rapportant aux fonctions holomorphes bornées". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 619.
- KULK, W. VAN DER: "Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der PFAFF'schen Gleichungen für den einfachsten Fall $m=2$ ". II. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 625.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". II. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 636.
- MAAS GEESTERANUS, R. A.: "On the development of the stellate form of the pith cells of *Juncus* species". II. (Communicated by Prof. G. VAN ITERSSEN). (With one plate), p. 648.
- GOUWENTAK, CORNELIA A.: "Cambial Activity as Dependent on the Presence of Growth Hormone and the Non-Resting Condition of Stems". (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW), p. 654.
- LANGE, CORNELIA DE: "Microscopic investigation of the brain in a case of cranio-synostosis". (Communicated by Prof. B. BROUWER). (With one plate), p. 664.
- KAAY, F. C. VAN DER, und L. P. H. J. DE VINK: "Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stutenserum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren". I. (Communicated by Prof. G. KREDIET). (With one plate and one table), p. 670.
- Erratum, p. 682.

All internal forces and moments are defined per unit of length in the axial or circumferential direction; the external load components R , Φ , and Z are defined per unit of surface. The displacements u , v , w of a point of the middle-surface — which do not occur in the figures — relate to the positive radial, tangential and axial directions. They satisfy the differential equations:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu \frac{dw}{dz} \right) + \frac{A^*}{B} \left(\frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{a^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{u}{a^4} - \frac{3-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial z^2} + \frac{1-\nu}{2a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial z} - \frac{1}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right) - \frac{R}{B} = 0 \\ & \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z} + \frac{A^*}{B} \left(-\frac{3-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial z^2} + \right. \\ & \quad \left. + 3 \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\Phi}{B} = 0 \\ & \frac{\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{A^*}{B} \left(\frac{1-\nu}{2a^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^2 \partial z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{a} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1-\nu}{2a^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{Z}{B} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

whereas the internal forces and moments are given by:

$$\left. \begin{aligned} k_{\varphi\varphi} &= \frac{A^*}{a^3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right) + B \left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu \frac{dw}{dz} \right) \\ k_{\varphi z} &= \frac{(1-\nu) A^*}{2a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{(1-\nu) B}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ m_{\varphi\varphi} &= \frac{(1-\nu) A^*}{2a} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ m_{\varphi z} &= -A^* \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{u}{a^2} \right) \\ k_{zz} &= \frac{(1-\nu) A^*}{2a^2} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{(1-\nu) B}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ k_{zz} &= -\frac{A^*}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + B \left(\nu \frac{u}{a} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ m_{z\varphi} &= A^* \left(\frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ m_{zz} &= \frac{(1-\nu) A^*}{a} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A^* and B stand for

$$A^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (h = \text{thickness of the shell}). \quad (3)$$

If we expand the loads R , Φ , Z in double Fourier-series:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a'_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b'_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c'_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d'_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \\ \Phi &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a''_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b''_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c''_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d''_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \\ Z &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a'''_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b'''_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c'''_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d'''_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

p and q integers, $\lambda = \frac{\pi q a}{l}$, $l = \text{length of the cylinder}$

it is seen, that, in seeking particular solutions of the equations (1) — thereby neglecting the boundary conditions of the problem — we can restrict ourselves to a load of the simplified form

$$\left. \begin{aligned} R_{pq}^a &= a'_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ \Phi_{pq}^a &= a''_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ Z_{pq}^a &= a'''_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

For indeed, if we can find a particular solution of (2) corresponding with the loadsystem (5), it must be equally easy to find corresponding solutions for the loadsystems:

$$\left. \begin{aligned} R_{pq}^b &= b'_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}; \quad R_{pq}^c = c'_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}; \quad R_{pq}^d = d'_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}; \\ \Phi_{pq}^b &= b''_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}; \quad \Phi_{pq}^c = c''_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}; \quad \Phi_{pq}^d = d''_{pq} \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}; \\ Z_{pq}^b &= b'''_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}; \quad Z_{pq}^c = c'''_{pq} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}; \quad Z_{pq}^d = d'''_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

A particular solution of (1), belonging to the loadsystem (5) is found by putting

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{pq}^a \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ v &= v_{pq}^a \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ w &= w_{pq}^a \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (7)$$

where u_{pq}^a , v_{pq}^a , w_{pq}^a design the solution of the equations

$$\left. \begin{aligned} [1 + k(p^4 + 2p^2\lambda^2 + \lambda^4 - 2p^2 + 1)] u_{pq}^a + \left[p + \frac{3-\nu}{2} kp\lambda^2 \right] v_{pq}^a + \\ + \left[-\nu\lambda + k \left(\frac{1-\nu}{2} p^2\lambda - \lambda^3 \right) \right] w_{pq}^a &= \frac{a^2}{B} a'_{pq} \\ \left[p + \frac{3-\nu}{2} kp\lambda^2 \right] u_{pq}^a + \left[p^2 + \frac{1-\nu}{2} (1 + 3k)\lambda^2 \right] v_{pq}^a - \frac{1+\nu}{2} p\lambda w_{pq}^a &= \frac{a^2}{B} a''_{pq} \\ \left[-\nu\lambda + k \left(\frac{1-\nu}{2} p^2\lambda - \lambda^3 \right) \right] u_{pq}^a - \frac{1+\nu}{2} p\lambda v_{pq}^a + \left[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} (1 + k)p^2 \right] w_{pq}^a &= \frac{a^2}{B} a'''_{pq} \end{aligned} \right\}$$

in which k stands for $A^*: a^2 B$.

The corresponding internal forces and moments as far as they are of practical interest, are given by

$$\left. \begin{aligned} k_{\varphi\varphi} &= \left[\frac{A^*}{a^3} (-p^2 + 1) u_{pq}^a + \frac{B}{a} (u_{pq}^a + p v_{pq}^a - \nu \lambda w_{pq}^a) \right] \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ k_{\varphi z} &= \left[\frac{(1-\nu) A^*}{2a^3} (-p\lambda u_{pq}^a - p w_{pq}^a) + \frac{(1-\nu) B}{2a} (\lambda v_{pq}^a - p w_{pq}^a) \right] \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \\ m_{\varphi\varphi} &= -\frac{(1-\nu) A^*}{2a^2} [2p\lambda u_{pq}^a + \lambda v_{pq}^a + p w_{pq}^a] \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \\ m_{\varphi z} &= \frac{A^*}{a^2} [p^2 + \nu\lambda^2 - 1] u_{pq}^a \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ k_{zz} &= \left[\frac{(1-\nu) A^*}{2a^3} (p\lambda u_{pq}^a + \lambda v_{pq}^a) + \frac{(1-\nu) B}{2a} (\lambda v_{pq}^a - p w_{pq}^a) \right] \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \\ k_{zz} &= \left[\frac{A^*}{a^3} \lambda^2 u_{pq}^a + \frac{B}{a} (\nu u_{pq}^a + \nu p v_{pq}^a - \lambda w_{pq}^a) \right] \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ m_{z\varphi} &= \frac{A^*}{a^2} [-(\nu p^2 + \lambda^2) u_{pq}^a - \nu p v_{pq}^a + \lambda w_{pq}^a] \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \\ m_{zz} &= \frac{(1-\nu) A^*}{a^2} [p\lambda u_{pq}^a + \lambda v_{pq}^a] \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \end{aligned} \right\} (9)$$

From $u_{pq}^a, v_{pq}^a, w_{pq}^a$ the quantities $u_{pq}^b, v_{pq}^b, w_{pq}^b; u_{pq}^c, v_{pq}^c, w_{pq}^c; u_{pq}^d, v_{pq}^d, w_{pq}^d$ can be obtained by writing

$$\left. \begin{aligned} u_{pq}^a &= \alpha_{11} a'_{pq} + \alpha_{12} a''_{pq} + \alpha_{13} a'''_{pq} \\ v_{pq}^a &= \alpha_{21} a'_{pq} + \alpha_{22} a''_{pq} + \alpha_{23} a'''_{pq} \\ w_{pq}^a &= \alpha_{31} a'_{pq} + \alpha_{32} a''_{pq} + \alpha_{33} a'''_{pq} \end{aligned} \right\} (10)$$

Then we have:

$$\left. \begin{aligned} u_{pq}^b &= \alpha_{11} b'_{pq} + \alpha_{12} b''_{pq} - \alpha_{13} b'''_{pq} \\ v_{pq}^b &= \alpha_{21} b'_{pq} + \alpha_{22} b''_{pq} - \alpha_{23} b'''_{pq} \\ w_{pq}^b &= -\alpha_{31} b'_{pq} - \alpha_{32} b''_{pq} + \alpha_{33} b'''_{pq} \\ u_{pq}^c &= \alpha_{11} c'_{pq} - \alpha_{12} c''_{pq} + \alpha_{13} c'''_{pq} \\ v_{pq}^c &= -\alpha_{21} c'_{pq} + \alpha_{22} c''_{pq} - \alpha_{23} c'''_{pq} \\ w_{pq}^c &= \alpha_{31} c'_{pq} - \alpha_{32} c''_{pq} + \alpha_{33} c'''_{pq} \\ u_{pq}^d &= \alpha_{11} d'_{pq} - \alpha_{12} d''_{pq} - \alpha_{13} d'''_{pq} \\ v_{pq}^d &= -\alpha_{21} d'_{pq} + \alpha_{22} d''_{pq} + \alpha_{23} d'''_{pq} \\ w_{pq}^d &= -\alpha_{31} d'_{pq} + \alpha_{32} d''_{pq} + \alpha_{33} d'''_{pq} \end{aligned} \right\} (11)$$

The corresponding sets of internal forces and moments are derived from (9) by replacing:

$$\lambda, u_{pq}^a, v_{pq}^a, w_{pq}^a, \sin \lambda \frac{z}{a}, \cos \lambda \frac{z}{a} \text{ by } -\lambda, u_{pq}^b, v_{pq}^b, w_{pq}^b, \cos \lambda \frac{z}{a}, \sin \lambda \frac{z}{a}$$

$$p, u_{pq}^a, v_{pq}^a, w_{pq}^a, \sin p\varphi, \cos p\varphi \text{ by } -p, u_{pq}^c, v_{pq}^c, w_{pq}^c, \cos p\varphi, \sin p\varphi$$

$$\left. \begin{aligned} p, \lambda, u_{pq}^a, v_{pq}^a, w_{pq}^a, \sin p\varphi, \\ \cos p\varphi, \sin \lambda \frac{z}{a}, \cos \lambda \frac{z}{a} \end{aligned} \right\} \text{ by } \left\{ \begin{aligned} -p, -\lambda, u_{pq}^d, v_{pq}^d, w_{pq}^d, \cos p\varphi, \sin p\varphi, \\ \cos \lambda \frac{z}{a}, \sin \lambda \frac{z}{a}. \end{aligned} \right.$$

2. *The explicit formulae.* In usual practice we always have to deal with cylinders for which the factor

$$k = \frac{A^*}{a^2 B} = \frac{h^2}{12 a^2} (1)$$

is an extraordinary small one. Consequently all terms with higher power than the first of k can be neglected. On this understanding, the following results hold:

a. Putting

$$N = (1-\nu^2) \lambda^4 + k [(\lambda^2 + p^2)^4 - 2 \{ \nu \lambda^6 + 3 \lambda^4 p^2 + (4-\nu) \lambda^2 p^4 + p^6 \} + \{ (4-3\nu^2) \lambda^4 + 2(2-\nu) \lambda^2 p^2 + p^4 \}] \quad (2)$$

the coefficients a_{ij} (comp. 1, 10) have the values:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(\lambda^2 + p^2)^2 + k [3 \lambda^4 + 2(1-\nu) \lambda^2 p^2 + p^4]}{N} \frac{a^2}{B} \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{-p \{ [(2+\nu) \lambda^2 + p^2] + k (2 \lambda^4 + 2 \lambda^2 p^2 + p^2) \}}{N} \frac{a^2}{B} \\ a_{13} = a_{31} &= \frac{\lambda [\nu \lambda^2 - p^2 + k (\lambda^4 - p^4 + 3 \nu \lambda^2)]}{N} \frac{a^2}{B} \\ a_{22} &= \frac{2(1+\nu) \lambda^2 + p^2 + k \left[\frac{2 \lambda^6}{1-\nu} + \frac{5-\nu}{1-\nu} \lambda^4 p^2 + \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \lambda^2 p^4 + p^2 (p^2 - 1)^2 - \right.}{N} \\ &\quad \left. - \frac{4\nu}{1-\nu} \lambda^4 - \frac{2(2-\nu+\nu^2)}{1-\nu} \lambda^2 p^2 + \frac{2}{1-\nu} \lambda^2 + p^2 \right]}{N} \frac{a^2}{B} \\ a_{23} = a_{32} &= \frac{\lambda p \left\{ 1 + k \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (\lambda^2 + p^2)^2 - \frac{2+3\nu-\nu^2}{1-\nu} \lambda^2 - \frac{1+3\nu}{1-\nu} p^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \right] \right\}}{N} \frac{a^2}{B} \\ a_{33} &= \frac{\lambda^2 + k \left[\left(\lambda^2 + \frac{2}{1-\nu} p^2 \right) (\lambda^2 + p^2)^2 - \frac{8-4\nu}{1-\nu} \lambda^2 p^2 - \frac{4}{1-\nu} p^4 + 4 \lambda^2 + \frac{2}{1-\nu} p^2 \right]}{N} \frac{a^2}{B} \end{aligned} \quad (3)$$

b. The internal forces and moments caused by the radial load

$$R_{pq}^a = a'_{pq} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \text{ are:}$$

$$k_{\varphi\varphi} = \frac{a a'_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} [(1-\nu^2) \lambda^4 + k \{ -\nu \lambda^6 - 3 \lambda^4 p^2 - (4-\nu) \lambda^2 p^4 - p^6 + (4-3\nu^2) \lambda^4 + 2(2-\nu) \lambda^2 p^2 + p^4 \}]$$

$$k_{\varphi z} = \frac{-a a'_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu) \lambda^3 p [(1+\nu) + k \{ 2 \lambda^2 + 2 p^2 + 2 \nu \}]$$

$$m_{\varphi\varphi} = \frac{-a^2 a'_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu) k \lambda p [\lambda^4 + 2 \lambda^2 p^2 + p^4 - \lambda^2 - p^2]$$

$$m_{\varphi z} = \frac{a^2 a'_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot k [\nu \lambda^6 + (1+2\nu) \lambda^4 p^2 + (2+\nu) \lambda^2 p^4 + p^6 - \lambda^4 - 2 \lambda^2 p^2 - p^4]$$

$$k_{z\varphi} = \frac{-aa'_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu)\lambda p [(1+\nu)\lambda^2 + k\{\lambda^4 - p^4 + (1+2\nu)\lambda^2 + p^2\}]$$

$$k_{zz} = \frac{aa'_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu)\lambda^2 p^2 [(1+\nu) + k(2\lambda^2 + 2p^2 + 2\nu)]$$

$$m_{z\varphi} = \frac{-a^2 a'_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot k[\lambda^6 + (2+\nu)\lambda^4 p^2 + (1+2\nu)\lambda^2 p^4 + \\ + \nu p^6 - \nu \lambda^4 + (1-2\nu-\nu^2)\lambda^2 p^2 - \nu p^4]$$

$$m_{zz} = \frac{a^2 a'_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu)k\lambda p [\lambda^4 + 2\lambda^2 p^2 + p^4 - (2+\nu)\lambda^2 - p^2].$$

c. The internal forces and moments caused by the tangential load

$\Phi_{pq}^a = a''_{pq} \sin p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}$ are:

$$k_{\varphi\varphi} = \frac{aa''_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot kp [(2+\nu)\lambda^6 + (5+2\nu)\lambda^4 p^2 + (4+\nu)\lambda^2 p^4 + \\ + p^6 - (2+2\nu-\nu^2)\lambda^4 - 4\lambda^2 p^2 - p^4]$$

$$k_{\varphi z} = \frac{aa''_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot \lambda [(1-\nu^2)\lambda^2 + k\{\lambda^6 + (2-\nu)\lambda^4 p^2 + (1-2\nu)\lambda^2 p^4 - \\ - \nu p^6 - 2\nu\lambda^4 + 2\nu(1-\nu)\lambda^2 p^2 + 2\nu p^4 + \lambda^2 - \nu p^2\}]$$

$$m_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 a''_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu)k\lambda [(2+\nu)\lambda^2 p^2 + p^4 - (1+\nu)\lambda^2 - p^2]$$

$$m_{\varphi z} = \frac{-a^2 a''_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot kp [(2+\nu)\nu\lambda^4 + 2(1+\nu)\lambda^2 p^2 + p^4 - (2+\nu)\lambda^2 - p^2]$$

$$k_{zz} = \frac{aa''_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot \lambda [(1-\nu^2)\lambda^2 + k\{\lambda^6 + (2-\nu)\lambda^4 p^2 + (1-2\nu)\lambda^2 p^4 - \\ - \nu p^6 - 2\nu\lambda^4 - (2-\nu)(1-\nu)\lambda^2 p^2 - (1-3\nu)p^4 + (2-\nu^2)\lambda^2 + (1-2\nu)p^2\}]$$

$$k_{zz} = \frac{aa''_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot p [-(1-\nu^2)\lambda^2 + k\{-\lambda^6 - (2-\nu)\lambda^4 p^2 - (1-2\nu)\lambda^2 p^4 + \\ + \nu p^6 + 2\nu\lambda^4 - 2\nu(1-\nu)\lambda^2 p^2 - 2\nu p^4 - \lambda^2 + \nu p^2\}]$$

$$m_{z\varphi} = \frac{a^2 a''_{pq}}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot kp [(2+\nu)\lambda^4 + (1+2\nu+\nu^2)\lambda^2 p^2 + \nu p^4 + \\ + (1-2\nu-2\nu^2)\lambda^2 - \nu p^2]$$

$$m_{zz} = \frac{a^2 a''_{pq}}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu)k\lambda [-(2+\nu)\lambda^2 p^2 - p^4 + 2(1+\nu)\lambda^2 + p^2]$$

d. The internal forces and moments caused by the axial load

$Z_{pq}^a = a_{pq}''' \cos p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}$ are:

$$k_{\varphi\varphi} = \frac{aa_{pq}'''}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot k\lambda [-\nu\lambda^6 + (1-2\nu)\lambda^4 p^2 + (2-\nu)\lambda^2 p^4 + p^6 + \lambda^4 - 2(1-\nu)\lambda^2 p^2 - p^4]$$

$$k_{\varphi z} = \frac{aa_{pq}'''}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot kp [\nu\lambda^6 - (1-2\nu)\lambda^4 p^2 - (2-\nu)\lambda^2 p^4 - p^6 - (1+2\nu-\nu^2)\lambda^4 - 4(1-\nu)\lambda^2 p^2 + 2p^4 - (2-3\nu)\lambda^2 - p^2]$$

$$m_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 a_{pq}'''}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu) k\lambda^2 p [-\nu\lambda^2 + p^2 - 1]$$

$$m_{\varphi z} = \frac{a^2 a_{pq}'''}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot k\lambda [\nu^2 \lambda^4 - p^4 + p^2 - \nu\lambda^2]$$

$$k_{zz} = \frac{aa_{pq}'''}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot kp [\nu\lambda^6 - (1-2\nu)\lambda^4 p^2 - (2-\nu)\lambda^2 p^4 - p^6 - (1+\nu)\lambda^4 + 3(1-\nu)\lambda^2 p^2 + 2p^4 - (1-2\nu)\lambda^2 - p^2]$$

$$k_{zz} = \frac{aa_{pq}'''}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot \lambda [- (1-\nu^2)\lambda^2 + k\{ -\lambda^6 - (4+\nu)\lambda^4 p^2 - (5+2\nu)\lambda^2 p^4 - (2+\nu)p^6 + 2\nu\lambda^4 + (7+2\nu-\nu^2)\lambda^2 p^2 + 2(2+\nu)p^4 - (4-3\nu^2)\lambda^2 - (2+\nu)p^2 \}]$$

$$m_{z\varphi} = \frac{a^2 a_{pq}'''}{N} \cos p\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} \cdot k\lambda [-\nu\lambda^4 + (1-\nu^2)\lambda^2 p^2 + \nu p^4 + \lambda^2 - \nu p^2]$$

$$m_{zz} = \frac{a^2 a_{pq}'''}{N} \sin p\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} \cdot (1-\nu) k\lambda^2 p [\nu\lambda^2 - p^2 + 1]$$

Botany.—*On the Relation between Flower-formation and Temperature. I. (Bulbous Irises.)* By A. H. BLAAUW. (Communication N^o. 68 of the Laboratory for Plantphysiological Research, Wageningen.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

In 1932 our investigation with the Dutch Irises was started. Nothing was known about the annual development of this plant, nor about the influence of temperature on flower-origination and flowering. The annual development has now been described; on the early bloom after a variety of treatments four communications were published; on the effect of temperature on flowering or non-flowering — a very important question for the cultivation — numerous experiments were carried out year after year, part of which have been published, the more recent years being still worked up. These experiments contain many data on the way in which the flower-formation is influenced by the temperature, the main object however was their application in practice. Besides experiments were repeatedly made, whose primary object was to get to know the influence of the temperature on the development and more particularly on the flower-formation.

After the investigation of the annual development of a plant such experiments concerning the reaction of the development to external factors ought in fact to precede the experiments for practical application. However, the social eagerness for improvements in culture often induces one to swerve from the more logical but longer path or to slacken one's pace, and on account of some newly acquired data and of experiences with other plants, to tackle those problems that have most importance for practice as directly as possible and so to get straightway nearer their solution.

As such an extensive material on the relation between flower-formation and temperature has up to now been brought together for no other plant, it was my intention before long to unite these data in a paper. In this paper not so much horticultural, but especially the botanical side of the collected observations would be in the foreground, compared with a few other investigated plants. As the result of various supplementary experiments has to be waited for, in this preliminary communication the main features will be outlined of the characteristic relation between the temperature and the flower-formation with the Dutch Bulbous Iris. Very likely this same relation will essentially hold for the whole *Xiphium*-section of the genus *Iris*. Not, however, for the bulbs of the *Reticulata*-section, in any case not for those of *Iris reticulata*, which behaves more like most bulbous plants and the rhizome Irises.

Out of the many as yet unpublished investigations a series will now

first be described, from which the relation, existing with these bulbs between the temperature and the organ-formation in darkness, will become apparent.

On August 3, 1936, bulbs of *Imperator* were sorted out with a circumference of 8—9 cm, and a weight of 10—13 g, each lot of ten weighing 11.45 g. In order to promote a good flower-origination these bulbs were first treated for a week with 31° C, on account of former experience. When the experiments started their initial condition was ascertained by fixing and examining 10 of them. At that time the growing-point has originated, besides 3 sheathing-leaves in each bulb, 1×3 , 2×4 , $6 \times 4\frac{1}{2}$ and 1×5 foliage-leaflets. The figure $4\frac{1}{2}$ means that the origination of the 5th leaf has commenced. The bulbs were fixed on Aug. 10, after having passed a week at 31° C; this is identical with a fixation on Aug. 3, as we know that at this temperature no external morphological change takes place.

The bulbs were now planted in small boxes and placed in temperatures below 20° C, as former investigations had shown that — if the same temperature is maintained during the whole time — only at these lower temperatures flowers can be formed. The boxes remained in the dark, also when the foliage came out, so that the light-factor was eliminated. About every three weeks from the batches of most temperatures lots of 10 were fixed and examined later.

Before the flower-origination is dealt with, there follows here a survey of the number of foliage-leaves, originated before the growing-point proceeds to the formation of flowers. The two foliage-like spathe-leaves have been counted as foliage-leaves. As the leaf-formation has stopped, once the flower-formation is in progress, various data may be combined so as to obtain a sharper average.

TABLE 1. Frequency of the number of leaves, formed in 2° to 17° C before the beginning of the flower-formation.

Foliage-leaves	6	7	8	9	10	11	12	13
2°	10	47	3					
5°	3	46	1					
7°		34	16					
9°			42	8				
13°				27	31	1		
17°					9	19	12	1

Thus, when flower-formation begins, there are present, on an average.

in	2°	5°	7°	9°	13°	17°
	6,9	7,0	7,3	8,2	9,6	11,2 leaflets.

Since at the start (Aug. 10) an average of 4,3 was found, 2,6, 2,7, 3,0, 3,9, 5,3, 6,9 leaves must have been *newly formed* in these temperatures. At 17° only those bulbs have been counted that are forming flowers, as the rest still continue to form leaflets. Now, since in the different temperatures a very unequal number of days is required to reach the beginning of the flower-formation, the just mentioned numbers do not give a comparative notion of the rate of this organ-formation.

Since August 10 there were passed in

	2°	5°	7°	9°	13°	17°
about	163	92	66	63	66	102 days

before the flower-formation set in and the leaf-formation was over. If we now reduce the figures for the leaf-formation to equal intervals of e.g. 100 days, the numbers

$$1,6 : 2,9 : 4,5 : 6,2 : 8,0 : 6,8$$

indicate the *relative speed of leaf-formation at the above temperatures*, the optimum lying at 13°. This holds for *planted* bulbs with a preliminary week at 31°.

The first fixing for an examination of the flower-origin took place on Oct. 20. As in this year the origination set in at an unusually early date, even this date was already a little too late. The following table contains the result of the whole investigation. As customary the flower-origination is divided into stages, marked by Roman figures, of which the meaning can be found in Comm. 43 (Proc. Roy. Ac. Sc. 2nd Sect. Vol. XXXIV, 1935). Stage I means that the growing-point is still in its leaf-forming period; at stage VI all whorls of the flower have been originated; VI+ indicates that the flower has developed further than just VI. The table has been supplemented with observations at 15° C and with the starting of the origination at 5° C in 1940—'41.

From table 2, supplemented with table 3, relating to 2° C, the following conclusions may be drawn.

Flower-formation is earliest with the bulbs in 7°—9° and 13°; on Oct. 20 and also later the bulbs in 9° are a little in advance of those in 7° and 13°. For 7° and 13° the beginning of the flower-origination may be put at about Oct. 15, for 9° a few days sooner, e.g. Oct. 12; in this estimate an error of a few days only is possible. On Nov. 30 13° seems to be slightly ahead of 7°, but the difference is small.

In 13° a stagnation appears to set in on Dec. 21; already on Nov. 30 it was noticed that the originated flower-parts were conspicuously small. Also in 15° C, in which temperature the origination begins 2 to 3 weeks

TABLE 2.

On Aug. 3 one week 31° C, then planted in 2° to 17° C (1936-'37).

	2°	5°	(5°—1940)	7°	9°	13°	15° (1940—'41)	17°
20 Oct.	—	—	I	1×I+ 2×I—II 6×II— 1×II	1×II— 9×II	1×I+ 5×I—II 4×II—	I	—
10 Nov.	—	—	4×I 3×I+ 1×I—II 2×II	2×III— 1×III 2×III+ 3×III—IV 2×IV—	2×III—IV 5×IV— 2×IV 1×IV+	1×III— 2×III 4×III+ 2×III—IV 1×IV—V	1×I 1×I+ 1×I—II 2×II— 1×II 1×II+ 3×II—III	—
30 Nov.	—	1×II 3×III— 4×III 2×III+	1×II 1×II+ 5×II—III 2×III— 1×III	1×IV+ 5×V 3×V+ 1×V—VI	1×V 8×VI— 1×VI	5×V—VI 5×VI— most flowers small	1×I 3×II+ 1×II—III 1×III— 1×III 1×III+ 2×III—IV	1×I+ 3×II— 5×II 1×II+
21 Dec.	10×I	1×IV 2×IV—V 5×V— 1×V 1×V+	—	3×VI— 7×VI	1×VI 9×VI+	10×VI— flowers small, poorly; last 1—2 fol.-leaves and 2 spathe-leav. membranous	1×III+ 1×V— 8×V	1×I 1×I+ 1×I— 5×II+ 2×II—
11 Jan.	10×I	1×V 2×V+ 1×V—VI 5×VI—	—	10×VI+	10×VI+	10×VI— flowers small, glassy; last 1—2 fol.- leaves a. 2 spathe-leav. membranous	1×V 2×V+ 6×V—VI 1×VI—	1×I— 3×II— 1×II 1×II— 2×III 1×IV— 1×V
30 Jan.	1×I+ 3×II— 2×II 2×II+ 2×III—	2×VI— 3×VI 5×VI+	—	—	—	—	1×V 4×V—VI 5×VI—	3×I 2×I+ 1×I— 1×IV— 1×IV— 1×V 1×V—

*) 4th, 5th, often the 3rd, sometimes the 6th leaflet thickened and scale-like.

TABLE 2 (Continued).

	2°	5°	(5°—1940)	7°	9°	13°	15° (1940—'41)	17°
20 Febr.	1×I 3×II 2×III— 4×III+	10×VI+	—	—	—	—	—	2×I*) 4×V 3×V—VI 7 shrivelled
30 March	2×II 1×II—III 1×III— 1×III 2×III+ 1×III—IV 1×IV— 1×IV+	—	—	—	—	—	—	1×I*) 9 shrivelled in stage V—VI; flowers very small
30 March	1×II 2×III 1×III+ 1×III—IV 4×IV+ 1×IV—V receptacle and flower- parts robust	—	—	—	—	—	—	4×I*) 6 shrivelled in ± stage V
10 Apr.	1×I—II 3×IV 2×IV—V 3×V— 1×VI— receptacle and flower- parts robust	—	—	—	—	—	—	—
10 May	1×II 1×IV+ 1×IV—V 1×V— 2×V 2×V+ 2×VI—	—	—	—	—	—	—	—

*) 4th, 5th, often the 3rd, sometimes the 6th leaflet thickened and scale-like.

TABLE 3. On Aug. 17 one week 31° C, then planted in 2° C (supplementary experiment, 1939—'40).

	Stage	Beginning of flowering
1 April	1 × III—IV 3 × IV— 2 × IV—V 2 × V—	June 4. Of 10 plants 9 begin to flower, planted outside the boxes; all 9 normal flowers.
15 April	8 × V 1 × V+ 1 × V—VI	June 6. 6 out of 20 begin to flower, of which 1 with a deviating number of flower-parts.
6 May	8 × V—VI 2 × VI—	June 16. 8 out of 20 are flowering, of which 6 with a deviating number of flower-parts.
27 May	4 × VI— 6 × VI	10—20 May risen from 2° to 13°, then 2° again. July 1. 9 out of 10, of which 3 slightly deviating.

The rest, planted from 2° on May 30, gives 25 flowers on 40 bulbs, of which 13 are quite normal.

later than in 13° C, there is hardly any further advance at the end of January.

In the temperatures of 9° and 7° the flower-origination succeeds smoothly and generally. Also in 5° flower-formation is successful, it starts rather later, however. According to the results of 1940 it begins shortly before Nov. 10; in 1936, which is clearly a little ahead of 1940, it started somewhat earlier still. The process is much slower than in 9° and 7°.

It was an interesting question whether even in 2° C flower-origination can proceed normally. There was a fair chance that this would be so, considering our former observations about the low temperature of the soil, at which flower-formation usually takes place in February and March (see Comm. Nrs. 39 and 49; Proceed. Vol. 36 and 39). In the course of January the flowers start developing in 2° C, after a stay of 5 months. The formation proceeds very slowly but quite regularly, carpels are only formed in the course of May, and not before the beginning of June, stage VI would be reached in most flowers. In 1937 this experiment was continued until May 10, which appeared not to be long enough. Therefore in 1939—1940 once more a number of bulbs were kept in 2° and no fixings done before

April 1. At this time they were developed a little further than the original ones of 1936—'37, so that on May 6 all bulbs were in stage V — VI and VI—. On May 27 they were all in stage VI— and VI, to be sure, but this fixation is of less value, as during the evacuation of Wageningen on May 10 the temperature of the strongly isolated thermostat had risen from 2° to 13° on May 20, on which date the former temperature of 2° could be restored. The flower-origins in 2° in April and the beginning of May had a perfectly healthy appearance, but none the less a number of plants were placed in light in the open on the fixing dates. The 10 that were placed outside on April 1 began to flower on June 4, 9 of them developing normally. So these bulbs had stood in 2° from Aug. 10 until April 1 and yet bloomed at the normal time. Of the 100 plants, transferred from 2° to the open between April 1 and May 30, 57 have flowered normally. Of these flowers 22 showed, more or less, deviations in the number of flower-parts.

In 17° flower-formation begins about 5 to 6 weeks later than in 13° and about 3 weeks later than in 15° C, moreover its progress is slow. When the tissue under the flower already begins to grow out to a small axis and the flower has advanced to about stage V—VI, this origin shrivels in many bulbs (from the middle of February). Some bulbs however remain in stage I and thus go on forming leaves. In this case part of the leaflets become thicker and fleshy and turn into scales; often this is the 4th or 5th (may be the 3rd) and sometimes the 6th leaf. So already in 17° C these bulbs lack the power to produce a flower. In most other experiments, for which we have no space, this was more frequent in 17° than in the series given here. In this latter series it happened \pm 13 times in 40 bulbs. Sometimes there is feeble indication of the beginning of a flower-origin, while the leaflets are already thickening.

From those other experiments it is still mentioned here that with a continuous stay in 20° C in darkness only very rarely a flower can be formed, that the formation of leaves goes on and that mostly from the 4th leaflet onwards a few leaflets thicken and thus will form a new bulb. This phenomenon, already partly present in 17° C and general in 20° C, deserves attention. The function, the character of the young leaflets is entirely determined by the temperature. The same leaflets (3rd or 4th to 6th e.g.) which by 13° C etc. are developed to assimilating stem-leaves, become in 20° C short, thick scales with reserve food. This behaviour at 17° to 20° C however is a thing by itself, it is a transition temperature. In 23° C and upwards likewise no flowers are formed, but also the leaf-formation then proceeds very slowly; no bulbs are formed within the original bulb (only in exceptional cases in 23° C). In 23° C and upwards the organs in the bulb remain externally pretty well unchanged for months.

Fig. 1 gives a graph, plotted with the data of table 1 and 2. It shows firstly how much time has elapsed from Aug. 10 until the approximate beginning of flower-formation in the various temperatures and secondly,

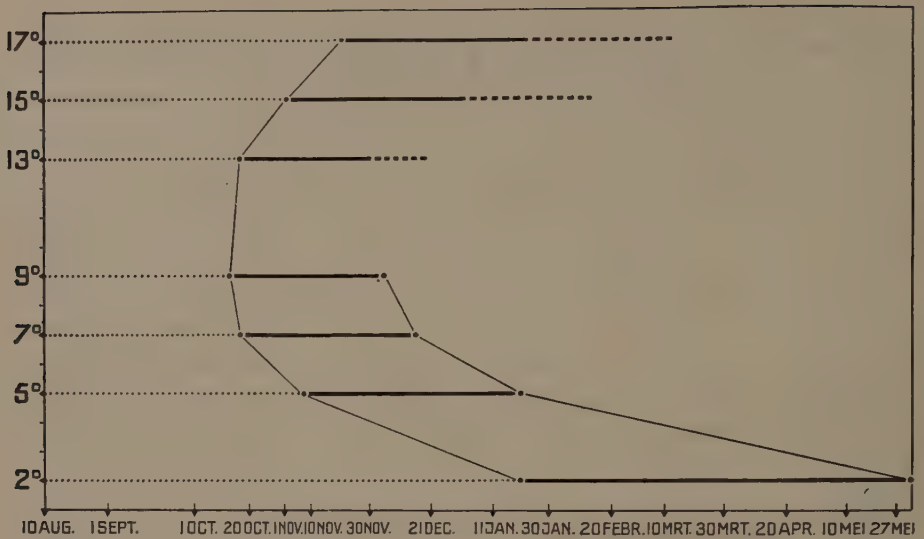


Fig. 1. Times from Aug. 10 to the beginning of the flower-formation (.....) and from the beginning to the end of the flower-origination (———)

how much time is required for the formation of flowers from the first beginning up to \pm stage VI (carpels have been originated). As in 13° — 15° and 17° the flower-origination is not even completed as far as stage VI and at last proceeds very slowly, no definite terminal point for the flower-formation could be plotted here. The initial and final dates were estimated as well as possible according to the table and our experience in other experiments; the error cannot exceed a couple of days.

In this figure it should be especially noted that the time, elapsed until the beginning of externally distinguishable flower-formation, and the time, required to advance from this beginning to stage VI, appear in the main to depend in the same way on the temperature.

(2nd part in the following number of the Proceedings.)

Anatomy. — *Introductory note on the phylogenetic and ontogenetic development of the Cortex cerebri.* By C. U. ARIËNS KAPPERS.

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

To Dr. BRUMMELKAMP's paper in this issue of the Proceedings the following lines may serve as an introductory note.

Studying the development of the forebrain cortex of Amniotes we find that in the Amphibian pallium two different structural fields are found. In the lateral part of the pallium (fig. 1), which in its peripheral layer contains the unmyelinated fibres from the olfactory bulb, a very simple structure occurs, the cells being located in the ventricular matrix. Very few of these cells show a peripheral migration into the direction of the fibre zone or lamina zonalis. This is the most primitive form of the cortex (paleo-cortex). In the medial wall of the hemisphere, the archicortex or primordium hippocampi (prim. hipp. fig. 1), a more advanced arrangement is found.

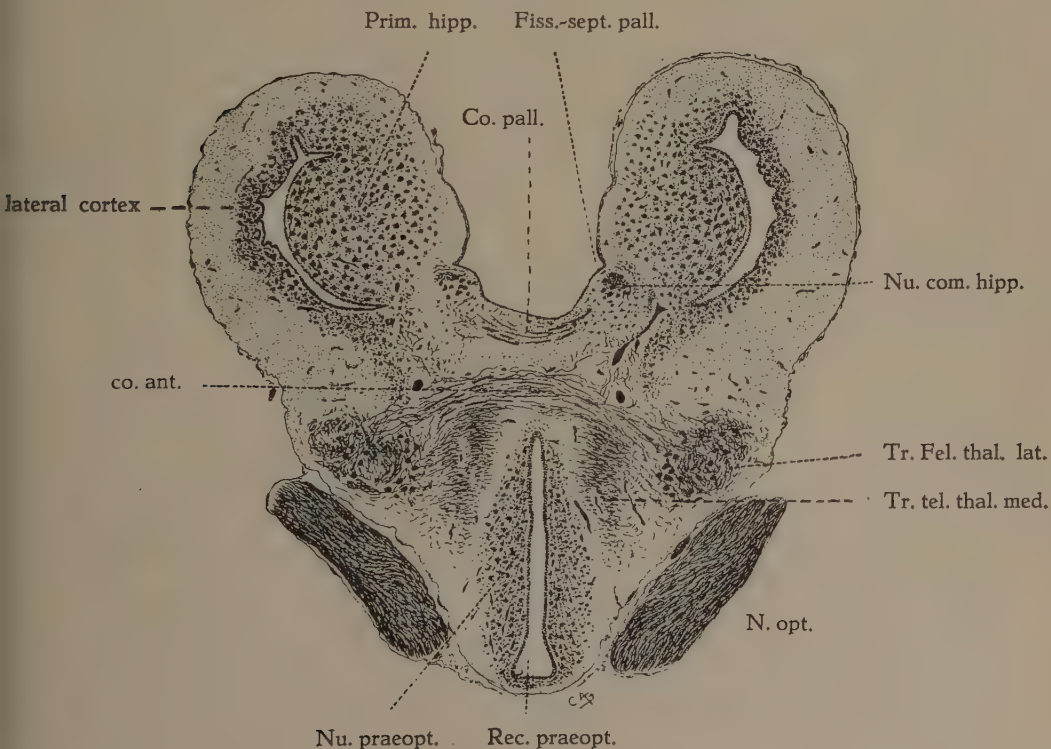


Fig. 1. Section of the posterior pole of the cerebral hemispheres of *Rana catesbeiana*. Note the cell distribution in the primordium hippocampi.

In this field, which in its superficial zone contains myelinated — mostly tertiary olfactory fibres — the cortical cells are no more exclusively arranged in the ventricular matrix, but many of them have migrated in a peripheral direction approaching the lamina zonalis.

KUHLENBECK ¹⁾ has called the attention to the fact that this migration is due to the neurobiotactic influence of the fibres in the lamina zonalis.

In Reptiles (fig. 2) the cells of the lateral olfactory cortex have also

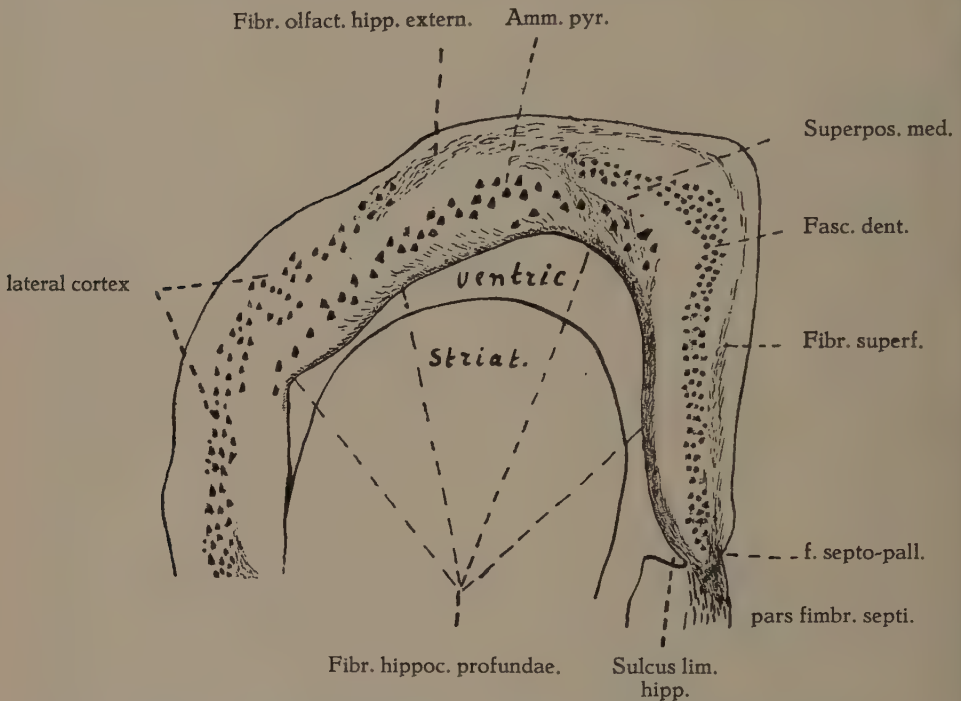


Fig. 2. Section of the left hemisphere of *Boa constrictor* showing the more superficial granular cells of the fascia dentata and the deeper partly subgranular position of the Ammon pyramids.

shifted peripherally forming an isolated layer underneath the fibre layer. Frontally in this cortex two layers are observed, a superficial granular receptive layer and a deeper pyramidal effector layer. In the archicortex of these animals the differentiation is more distinct. Whereas the archicortex of Amphibia does not yet reveal a laminar differentiation of cells such a differentiation is obvious in Reptiles.

In the archicortex of these animals two layers are observed. The most medial one of these archicortical layers, which at the same time lies nearer to the periphery, is a layer of small granular cells (fasc. dent. fig. 2). It is a chiefly receptive layer i.e. it receives impulses from tertiary

¹⁾ Ueber den Ursprung der Großhirnrinde. Eine phylogenetische und neurobiotaktische Studie. Anat. Anz. 15 (1922).

olfactory fibres running in its lamina zonalis (fib. superf.). The second archicortical layer consists of large pyramidal cells, the Ammon pyramids (Amm. pyr. fig. 2) which partly extend underneath the granular layer (superpositio medialis).

From this deeper pyramidal layer descending and commissural fibres originate, the *fibrae hippocampales profundae*.

We thus find in Reptiles the first differentiation of the cortex in a receptory granular layer and an effectory (and commissural) pyramidal layer extending underneath the granular layer.

BRILL¹⁾ and ADOLF MEYER²⁾ whose observations were confirmed by KAPPERS³⁾ and CROSBY⁴⁾, have been the first to realize that these two archicortical layers of Reptiles correspond with the two characteristic layers of the mammalian hippocampus: the granular layer being homologous to the fascia dentata, (see fig. 3), the pyramidal layer to the ammon pyramids of Mammals (Amm. pyr. fig. 3). A multilaminar neocortex chiefly related to non-olfactory functions does not yet occur in Reptiles.

As shown by CRAIGIE⁵⁾ a typical multilaminar neocortex first occurs in birds, lateral to the archicortex, between this and the primary olfactory cortex. This multilaminar neocortex is especially evident in the Ratites. But even in these animals the larger part of this cortical field loses its characteristic cortical structure changing into a non laminated dense mass of cells which is continuous with the neostriatum (the hyperstriatum of EDINGER). In the Carinates the neocortex has lost its typical characters and gradually continues in striatal structures.

In Mammals the whole pallium located between the ventrolateral olfactory cortex and the medial archicortex or hippocampus shows a

¹⁾ BRILL. The true homology of the mesial portion of the hemispheric vesicle in the Sauropsida. Medical Record, March 1890.

²⁾ ADOLF MEYER. Ueber das Vorderhirn einiger Reptilien. Ztschr. f. Wiss. Zool., Bnd. 55 (1892). Id. Zur Homologie der Fornix commissur und des Septum lucidum bei Reptilien und Säugern. Anat. Anz. Bnd. 10 (1895).

³⁾ ARIËNS KAPPERS. The phylogenesis of the palaeocortex and archicortex compared with the evolution of the visual neocortex. Arch. of Neur. and Psych. of the London Country Council, Vol. 4 (1909).

⁴⁾ CROSBY. The forebrain of Alligator mississippiensis. Journ. Comp. Neur., Vol. 27 (1917).

⁵⁾ CRAIGIE. The cerebral cortex of Apteryx. Anat. Anz., Bnd. 68 (1929); Id. Studies on the brain of the Kiwi (Apteryx australis). Journ. Comp. Neur., Vol. 49 (1930); Id. Multilaminar cortex in the dorsal pallium of the Emu, Dromiceius Novaehollandiae. Psych. en Neur. Bladen, Amsterdam (1934); Id. The hippocampal and parahippocampal cortex of the Emu (Dromiceius). Journ. Comp. Neur., Vol. 61 (1935); Id. The cerebral hemispheres of the Kiwi and the Emu (Apteryx and Dromiceius). Journ. of Anat., Vol. 69 (1935); Id. Some features of the pallium of the Cassowary, Anat. Anz., 81 (1935); Id. The cerebral cortex of the Ostrich (Struthio). Journ. of comp. Neur., Vol. 64 (1936); Id. Notes on the cytoarchitectural features of the lateral cortex and related parts of the cerebral hemispheres in a series of Reptiles and Birds. Trans. Roy. Soc. of Canada, Vol. 30 (1936); Id. The cerebral cortex in Palaeognathine and Neognathine Birds. Journ. Comp. Neur., Vol. 73 (1940).

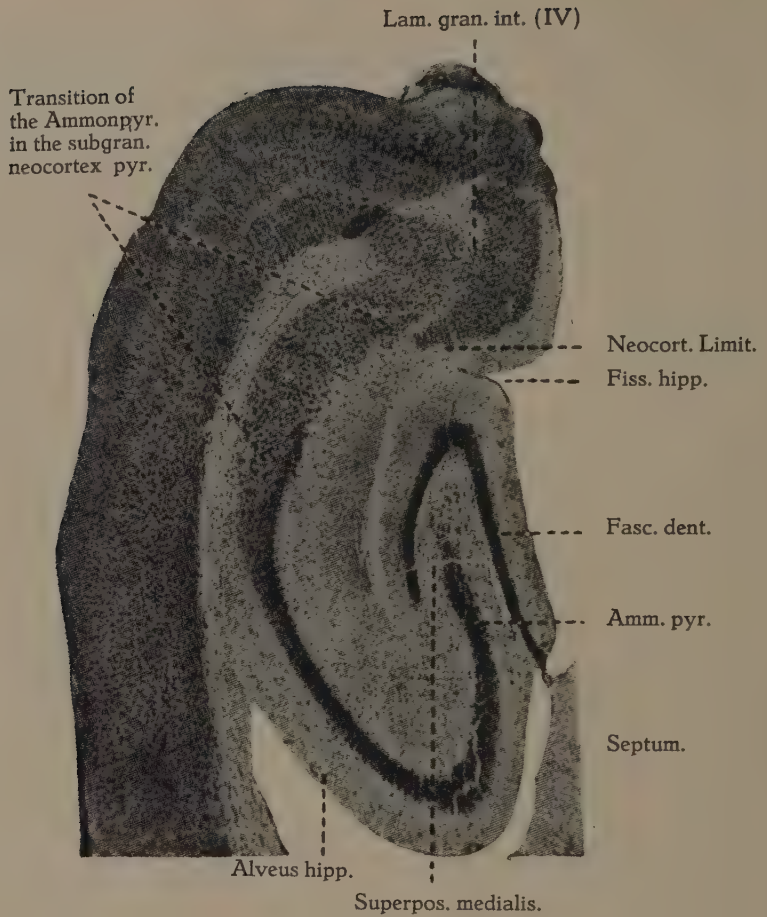


Fig. 3. Relation of the olfactory hippocampal cortex to the neocortex of the rat.

characteristic neocortical structure, i.e. a multilaminar arrangement of cells (fig. 3 and 4).

Even in lower mammals this neocortex has such a great extension, that the primary olfactory cortex is pushed in a ventral direction, while the archicortex, especially its pyramidal layer adjacent to the neocortex, is lifted up in a dorsal direction (fig. 3), thus giving rise to the peculiar folded form of the archicortex from which its names cornu Ammonis and Hippocampus are derived.

A comparison of the neocortex with the older forms of cortex, the lateral olfactory and medial archicortex shows that, notwithstanding considerable differences, the same principles obtain in it.

This principle is that the upper layer(s) has (have) a receptory function, the deeper layer(s) an effectory and commissural function.

Whereas each of these functions in the primary olfactory and archicortex, however, is represented by one cell layer only, the receptory function in the neocortex is divided over three layers, all of which may be considered

as derivatives of the originally single granular layer. This also appears from VAN 'T HOOG's ¹⁾ comparisons of the same neocortical field in small and large representatives of the same order of mammals, which

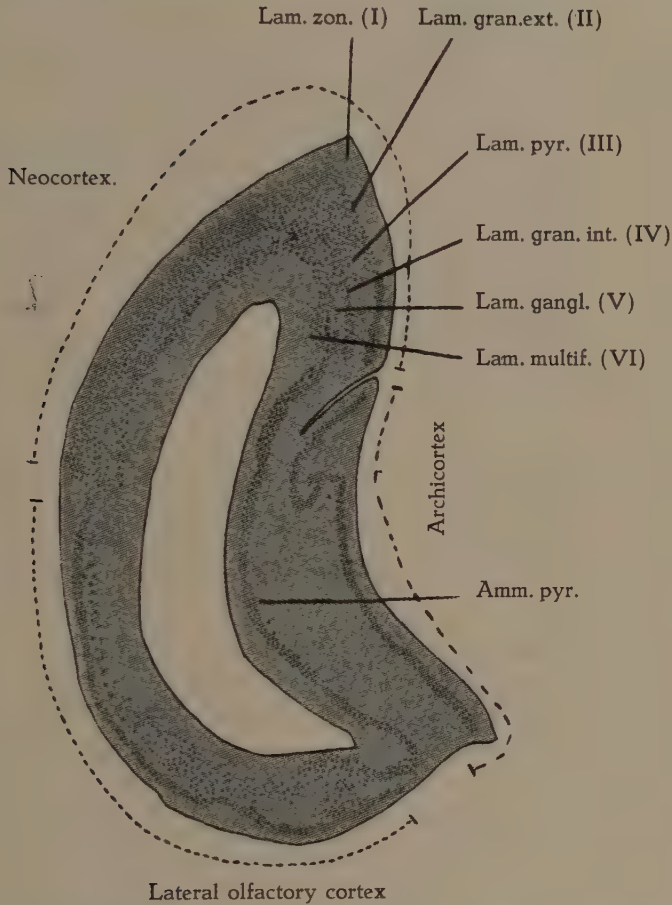


Fig. 4. Cerebrum of an embryo of *Dasyurus novemcinctus* showing the six layered neocortex between the two-layered lateral olfactory and archicortex.

shows that the supragranular layers (II + III) in the large animals increase at the expense of the (internal) granular layer (IV, fig. 5). The effector function being divided over two subgranular layers, the lam. ganglionaris (V) and multiformis (VI) this makes five cell layers together. Adding the lamina zonalis the neocortex thus consists of six layers.

That the neocortex has a six-layered character is proved for various mammalian orders and for man by BRODMANN ²⁾ who also showed that in the prenatal stage this six-layered structure is very much the same

¹⁾ VAN 'T HOOG. Ueber Tiefenlokalisation in der Grosshirnrinde. Psych. en Neur. Bladen, Amsterdam (1918).

²⁾ BRODMANN. Vergleichende Lokalisationslehre der Grosshirnrinde in ihren Prinzipien dargestellt auf Grund des Zellbaues, Leipzig (1909).

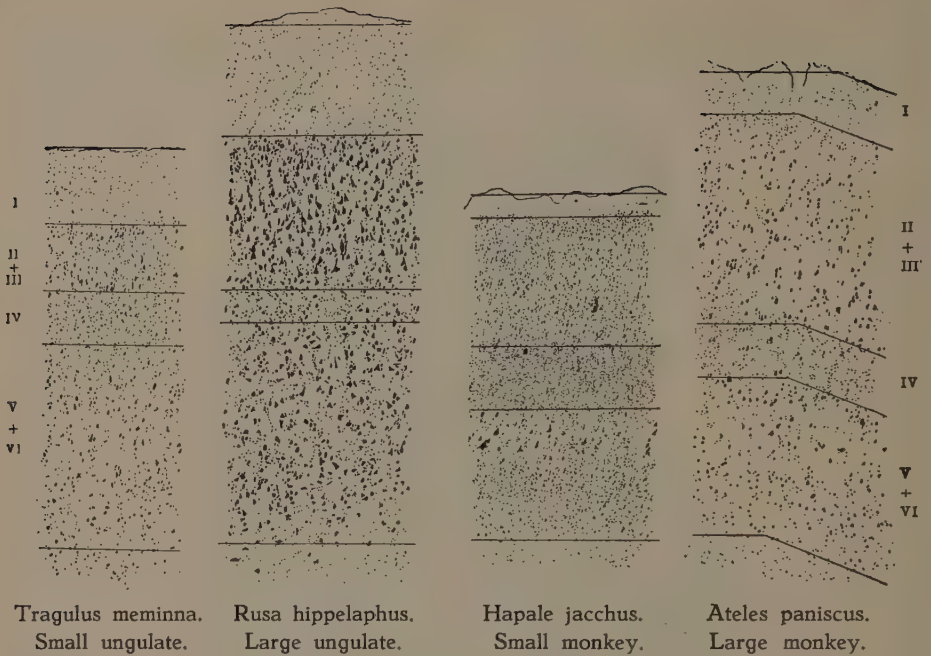


Fig. 5. (After VAN 'T HOOG) Increase of the supragranular cell layers (II + III) at the expense of the internal granular layer (IV) in larger animals of the same orders.

over the whole neocortex. Personally we had an opportunity to confirm this for *Dasypus novemcinctus* as shown by our figure 4. Of these six layers the upper one contains fibres only. In the other five nerve cells are predominant. Comparing the five cell layers of the mammalian neocortex with the original two layers of the olfactory cortex, it appears that the granular receptive layer of the latter is represented in the neocortex by the lam. granularis interna, the supragranular pyramid and stellate cells, the effector pyramidal layer of the olfactory cortex is represented by the subgranular pyramids, the so called laminae ganglionaris and multiformis.

The receptive and associative function of the three upper cell layers of the neocortex clearly appears from the researches of MOTT, BROUWER, LORENTZ DE NO, the effector motor and commissural function of the two deep layers from the work of NISSL, VAN VALKENBURG, BIELSCHOWSKY, DUSSER DE BARENNE.

The regional differentiations occurring in the further development of the pallium, which is the cause that so many regions may be distinguished in the adult, may be explained by the fact that in some of these regions the effector or commissural, in others the receptive and associative-receptive functions prevail ¹⁾.

¹⁾ ARIËNS KAPPERS. Vergleichende Anatomie des Nervensystems der Wirbeltiere und des Menschen, Bnd. II (1921), Bonn, Haarlem. Id., HUBER and CROSBY. The comparative anatomy of the nervous system of vertebrates including Man, Vol. II (1936), Macmillan, New York and London (1936).

So in the motor or prerolandic area the deeper effectory layers of large pyramidal cells prevail. In the sensory, visual and acoustic area the granular layers are very obvious and in the associative-receptory regions, as the frontal and parietal cortex, the supragranular pyramids.

Yet, in all these regional differentiations the pre-adult five layer structure may be observed also in the adult neocortex notwithstanding the differences in density and size of cells and the variations in the depth of the neocortical columns in the adult. It is here that the researches of BOK and BRUMMELKAMP give us more light. BOK¹⁾ and his pupils gave us valuable informations concerning the influence of the folding of the cortex on the height of its various layers, the relations existing between the volume of the cell bodies and dendrites on one hand and their distance to the zonal layer on the other, and concerning the width of the interfibrillar spaces (RENES²⁾). BRUMMELKAMP³⁾ showed the striking fact that notwithstanding the changes in the adult the nuclear mass in neocortical columns of equal diameter is the same at every spot of the neocortex. Together with VAN VEEN⁴⁾ he could confirm this for the human cerebrum, counting and measuring more than 20.000 nuclei in various neocortical columns of equal diameter. In his paper in this issue BRUMMELKAMP shows that the equality of nuclear volume holds good already for the neocortical matrix and persists in the adult. Since in each single row of cells the nuclear volume remains the same whatever the change in the size of the cells and nuclei may be, the number of single cell rows in each cortical region is the same notwithstanding the great differences in the depth of these regions. He furthermore shows that the surface extension of a functionally homogeneous region originates from juxtapositional

1) BOK. Der Einfluss der in den Furchen und Windungen auftretenden Krümmungen der Grosshirnrinde auf die Rindenarchitektur. Zeitschr. f. d. ges. Neur. u. Psych., Bnd. 121 (1929). Id. A quadratic relation between the volumes of the nucleus and body of ganglion cells of different sizes. Psych. en Neur. Bladen, Amsterdam (1934). Id. Messungen an den Ganglienzellen der Grosshirnrinde. I. Die Einheitlichkeit der einzelnen Hauptzonen. Zeitschr. f. mikrosk.-anat. Forschung, Bnd. 36 (1934). Id. A quantitative analysis of the structure of the cerebral cortex. Verh. d. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, (2e sectie), 35, No. 2 (1936). Id. The branching of the dendrites in the cerebral cortex. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XXXIX (1936).

BOK and VAN ERP TAALMAN KIP. The size of the body and the size of the cerebral cortex. Acta Neerl. Morph., II (1939). Id. The size of the body and the size and the number of the nerve cells in the cerebral cortex. Acta Neerl. Morph., III (1939).

BOK. Cephalization and the boundary values of the brain- and body sizes in mammals. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XLII (1939). Id. The different structures of the cyto-architectonic fields of the cerebral cortex as different manifestations of a general scheme, each being mainly indicated by the value of one varying property, called the field exponent. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XLII (1939).

2) RENES. Over de vezelrijkdom van de hersenschors. Diss. Leiden (1940).

3) BRUMMELKAMP. Normale en abnormale hersengroei in verband met de cephalisatie-leer. Dissertatie, Amsterdam (1937).

4) BRUMMELKAMP and VAN VEEN. The distribution of the nervous nucleus volume in the Neocortex. Verh. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Sectie 2, Vol. 39 (1941).

growth of this area in which the equi-nuclear volume again persists. This he explains by the fact that for juxtapositional growth no extra energy in the lines of the neurobiotactic field of power is required.

This juxtapositional growth apparently acts an important part also in the development of other surface extensions, such as the cerebellar cortex and tectum opticum which also increase by surface extension in a principally homogeneous field.

And the same holds good for what we have called "internal cortical" structures ¹⁾, which do not increase in thickness but by lamellation i.e. by surface extension, such as the inferior and superior olives, the nucleus dentatus, and — in some animals — the nuclei of the posterior columns and substantia gelatinosa Rolandi, all of which are structures intercalated in an equi-energetic ascending system.

¹⁾ ARIËNS KAPPERS. Ueber das Rindenproblem und die Tendenz innerer Hirnteile durch Oberflächenvermehrung statt Volumzunahme zu vergrößern. *Fol. Neurobiologica*, Bnd. 8 (1914).

Anatomy. — *Equal distribution of the neo-cortical nucleus mass and equal growth intensity of the neo-cortex. (The significance of neurobio-taxis for this problem.)* By R. BRUMMELKAMP. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

In 1937 I showed that in the neo-cortex of various mammals (dog, cow, donkey, pig, humans) the nucleus mass of the nerve cells is equally distributed. In 1940 in a renewed study of the human neo-cortex in which over 20.000 nuclei were measured VAN VEEN and I could confirm this ¹⁾.

The equal distribution of the nucleus mass manifested itself a.o. in the fact that in columns with the same diameter, extending perpendicularly through the whole neo-cortex from the pia to the white substance, the total of nucleus volumes was the same, independent of the neo-cortical area from which the column was taken, provided the area investigated was little, or not at all curved. The walls of the sulci were most suitable for our purpose.

In collaboration with VAN VEEN I examined the area frontopolaris, praecentralis, postcentralis, temporalis propria media, striata and frontalis agranularis. The number and size of the nuclei varies greatly in these areas. In the regio praecentralis the average number was 165 per column, here the average nucleus size was greatest; in the regio calcarina the average number was 524 per column and here the average nucleus size was smallest. Apart from the difference in size and number the product of average size and number, that is the total nucleus volume per column, was the same, with slight variations, in all these areas being 1672, 1795, 1737, 1690, 1771, 1627 volume units respectively.

In the present article we propose to discuss *what factors of growth contribute to this equal distribution of the neo-cortical nucleus mass.*

HIS ²⁾ showed that the walls of the brain vesicles originally consist of two layers: an inner layer closely packed with cells (matrix) and an outer layer, destitute of cells (lamina zonalis or "Randschleier" of HIS). Between matrix and lamina zonalis, there soon develops a tissue of loose texture. The cortex is formed by cells which detaching themselves from the matrix and migrating through the intermediate layer, reach the lamina zonalis where they accumulate and again undergo a process of growth. So the formation of the cortex is determined by three processes, distinct as to

¹⁾ R. BRUMMELKAMP and P. VAN VEEN. The distribution of the nervous nucleus volume in the neo-cortex. Verh. der Kon. Akad. v. Wetensch. Tweede Sectie, Dl. XXXIX, 1, 1940.

²⁾ W. HIS, Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monaten, Leipzig, 1904.

space and time: the formation of the matrix, the migration of the maternal cells to the lamina zonalis and the growth of the migrated cells as soon as they reach the lamina zonalis.

It is striking that, *wherever the early neo-cortex is not influenced by fissuration*, it practically has the same thickness (Fig. 2a, b). Our preparations show that the concentration of the nuclei is the same everywhere and that the number of mitoses is the same in places situated at the same depth. *It seems as if an equal supply of cells fit for migration is guaranteed everywhere by the matrix.*

The nature of the developing cortex is rendered evident by this equal supply. Figures 1a, b, c, d, e, f taken from sheep fetuses in different stages of development, show that *in parts not influenced by curvation*, similarly as with the matrix, the developing cortex, though differing from stage to stage, in each separate stage is equally thick everywhere and that the density of the nuclei is the same. So from very early stages onward the distribution of the neo-cortical nucleus volume within each stage is the same over the whole developing neo-cortex.

That from the earliest stages of cortical development the nucleus mass is distributed equally in it may be confirmed by counting and measuring. As in the adult cortex, I measured the volumes of each nucleus present in columns of the cortex *anlage*. These columns extending from the intermediate layer to the pia had the same diameter. From this the total nucleus volume of the column was calculated. The position of the columns examined agrees with the squares marked 1, 2, 3 in our figures 1a to 1f.

With the aid of a drawing apparatus the contours of the nuclei seen on a perpendicular traverse of the *anlage* from the lamina zonalis to the intervening layer were traced.

As objective I used an oil immersion 120 Zeiss, as ocular an 8 Leitz, in which a counting net had been mounted. The width of the column viewed was determined by the width of the counting net, the thickness of the column was equal to that of the preparation (5μ). The preparation was fixed to the object table in such a way that it was crossed in a direction perpendicular to the lamina zonalis. The greatest length (a) and the greatest width (b) of the nuclei traced were measured with a glass measuring staff and from the formula $V = \frac{1}{6} \pi a \cdot b^2$ the volumes of the nuclei, conceived as rotation ellipsoids, were calculated.

The results of this investigation are contained in table I.

Column 5 of this table shows that, although varying from stage to stage, in each separate stage the total nucleus volume per column remains the same within narrow limits.

From this it appears that the equal distribution of the nucleus volume in adult cerebra, mentioned in the beginning, has already manifested itself for a considerable length of time¹).

¹) A striking example of the uniform structure of the neo-cortex during embryonic development is also seen in ARIËNS KAPPERS, *Vergl. Anat. d. Nervensystems*, Haarlem, 1920-'21, p. 1168, fig. 614, where a transverse section through the embryonic brain of *Dasypus novemcinctus* is given.

Hence our problem may be formulated as follows: *what factors are responsible for the equal distribution of the nucleus volume during the growth of the neo-cortex.*

TABLE I.

Stage	Column	Number of nuclei	Aver. nucl. size	nucl. vol. per column
1a	1	27	127	3429
	2	28	132	3696
1b	1	451	130	58704
	2	438	126	60013
	3	446	127	56642
1c	1	500	134	67125
	2	478	142	67876
1d	1	574	123	70602
	2	564	125	70500
1e	1	653	130	84165
	2	688	129	87101
1f	1	725	144	104400
	2	738	142	104796

From what follows it will be seen that in this process *neurobiotaxis may play an important part*. In his extensive studies ARIËNS KAPPERS¹⁾ showed that in the phylogenetic development of the nervous system a shifting of nerve cells in the direction of afferent fibre systems occurs, if these cells are stimulated at the same time (correlatively) as these fibre-systems. BOK²⁾ could confirm this phenomenon in the ontogenetic development.

Mutatis mutandis we may say that between stimulated neurons and correlatively stimulated fibre areas there is a field of neurobiotactic power³⁾. The lines of power in this field connect the two systems, i.e. cells and fibre area.

¹⁾ ARIËNS KAPPERS, *Vergl. Anat. d. Nervensystems*, Haarlem, 1920—'21. (See also ARIËNS KAPPERS, HUBER, CROSBY, New York, 1936), formulated the following laws: If several centres of stimulation are present in the nervous system, the outgrowth of the chief dendrites and eventually the shifting of cells takes place in the direction whence the greatest number of stimulations reach the cell. This outgrowth or shifting, however, only takes place between stimulative correlated centres. Temporarily correlated excitation plays a part also in establishing the connections of the neuraxes.

²⁾ BOK (*Folia neurobiologica*, 1915) found that when a bundle of unmyelinated nerve fibres within the central nervous system grows out and passes neuroblasts in its course, these neuroblasts become activated by the fibre bundle. Such a neuroblast sends out a neuraxis in a direction perpendicular to the bundle and this neuraxis apparently grows in the direction of the current that irradiates sidewise from the growing nerve fibres. In the mean time the cell itself moves in the direction of the activating bundle. (See also: ARIËNS KAPPERS, *The evolution of the nervous system*, Haarlem, 1929, fig. 5, 6 and 7.)

³⁾ For the present the character of the powers acting in the neurobiotactic field is

Evidently such a neurobiotactic field of power also occurs in the walls of the anterior brain vesicle¹⁾, where its active systems are represented by the nerve cells in the ventricular matrix and the fibre area in the lamina zonalis. The lines of power connecting both systems run in the wall of the brain vesicle. In non-curved parts of the vesicle they are perpendicular to the systems.

In this connection it is significant that the shape of the migrating nuclei frequently resembles that of falling raindrops, which, first are stretched, then constricted, and finally divide into two parts (fig. 4). Although in the living nuclei active processes play the chief part in the process of transformation (amitotic divisions), yet it is striking that the *direction* of the plane of constriction, as in the case of the falling raindrop, is always perpendicular to the direction of the migration caused by the influence of the vertical field of power.

As appears from our figures the cells accumulate as closely as possible under the lamina zonalis, where they form a compact layer. As soon as the first layer has been formed a second one develops underneath, and so on. In figure 5, taken from the brain of a mouse, we clearly see how such a layer is formed against the previous one.

If the neurobiotactic field is equally strong everywhere in the perpendicular direction, the regular structure of the matrix described implies that everywhere we may expect an equally dense migration and hence a neo-cortex *anlage* which (in nearly uncurved parts) has the same thickness. As a matter of fact this is the case, as is seen from fig. 1a—1f. From this we conclude that there is a power field, which is equally strong (homogeneous) everywhere in a direction perpendicular to the power lines.

Figure 3, which shows an exception to the rule, presents a very early stage of development. It is worth mentioning because it clearly demonstrates the significance of the neurobiotactic field for the developing cortex. In this early period the fibre system of the lamina zonalis is only partially developed. It only occurs near the fossa Sylvii, where the fibres coming from a latero-basal direction, first enter. Consequently the neurobiotactic field first occurs here, causing the first migration in this place. During a short time the developing cortex is also thicker here. Soon, however, the fibres extend over the entire lamina zonalis and the neo-cortex becomes equally thick everywhere. The early stage mentioned above also shows that as long as there are no fibres in the lamina zonalis no migration of cells

irrelevant. According to ARIËNS KAPPERS (J. Comp. Neur. Vol. 27, 1917) they may be described as galvano-electric phenomena. For our purpose it is sufficient to know that powers are generated, by which the cells are moved to the place of correlative stimulation. An active displacement in response to an agent liberated in the stimulated zone, would also be sufficient.

¹⁾ KUHLENBECK (Anat. Anz. Bd. 67, 1929) was the first to point out the significance of neurobiotaxis for the migration of matrix cells to the lamina zonalis. Probably the matrix cells in these early stages of development are stimulated by means of protoplasmatic fibres.

occurs and furthermore that a greater development of fibres causes a denser migration.

The same is observed in the phylogenetic development of the cortex. In amphibians the fibre system of the lamina zonalis is poorly developed. In the lateral wall no other but unmyelinated fibres occur. Myelinated fibres only occur in the dorsomesial part (primordium hippocampi), and it is only in this part that we clearly see migration of cells. In reptiles where the fibres of the lamina zonalis are already more strongly developed over the whole cortex, there is a more evenly distributed migration. Thanks to the extensive fibre system of the lamina zonalis there is in mammalia a very strong neurobiotactic field; we also see that here the migration is densest. (See ARIËNS KAPPERS: *Die vergleichende Anat.*, Haarlem, 1921.)

As per stage the nuclei are everywhere of the same average size (Table I, column 4) and the cortex *anlage* has everywhere an equal thickness we may conclude that per stage there is everywhere an equal number of layers forming it. The same may be concluded from the size of the average nucleus volume and the equal distribution of nucleus mass per cortex column (Table I, column 4 and 5).

We will now show that under the influence of the neurobiotactic field the number of layers is not changed by the growth of the cortex *anlage* itself, but that it remains equal to the number formed in consequence of the migration. We will then distinguish between two cases. In the first case we suppose that the growth of the cortex takes place through *cell division*, in the second case that the growth of the cortex is brought about by *increase in volume of the individual cells*, without an increase in the number of elements.

About the influence of the individual increase of the cell size on the original number of layers a few words will suffice. It is evident that the number of layers will not be affected by it, although the area of the layers and their height will be influenced and the cortex will increase in extension and in thickness.

Cell division may take place in different directions. It may be that the new formed cell finds a place under the previously existing cell (infra-position) or by the side of it (juxtaposition)¹⁾. There also may be a combination of the two arrangements. Only in the case of juxtaposition

¹⁾ The possibility that in cell division the new formed cell places itself above the original one (supraposition) is not mentioned here, because in the majority of cases it cannot happen in the cells of the cortex *anlage*: the cells coming from the matrix deposit themselves firmly against those that were present before, so that there is no room during the cell division for further displacement in an upward direction. It would seem that the cells of the upper layer immediately under the lamina zonalis form an exception. The question might be asked why they are not drawn into the lamina zonalis by the power of the neurobiotactic field. Probably the peculiar structure of the lamina zonalis forms a barrier, especially the system of tangential fibres, which are placed transversely to the direction of movement of the cells, thus making difficult a further penetration of the nerve cells. In the white substance (radial position of the fibres) such an obstruction does not occur at this stage. The deeper tangential fibres are formed much later and therefore have no influence on the phenomenon discussed.

does the number of layers formed by migration remain unchanged. Which position will be achieved in the cortex *anlage*? If there is no preferred direction infraposition and juxtaposition will be present in an equal degree. But is there no preferred direction?

In the case of infraposition the new-formed cells will move away from the lamina zonalis in a direction opposite to the direction of the power of the field. To overcome this power, energy is required. In juxtaposition the cells move in a direction perpendicular to the power of the field; no special energy is required for this movement (fig. 6).

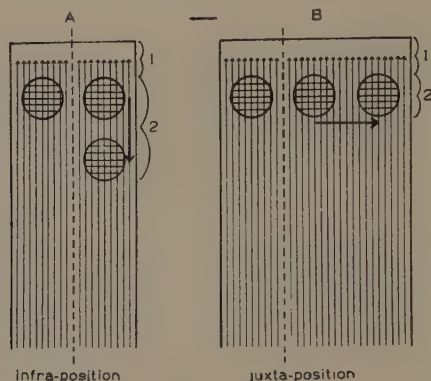


Fig. 6. Scheme of the location in the neurobiotactic field of dividing cells of the cortex *anlage*. Infra-position requires more energy than juxtaposition, so that the latter mode of location is physically more probable. Supraposition is out of the question, as there is no room for the cells of the cortex *anlage* located deeper, and as the fibre system of the lamina zonalis forms a barrier to the cells immediately below the lamina zonalis.

In juxtaposition, therefore, less energy is required than in infraposition. In agreement with the rule that a physic system strives towards a condition of minimal potential energy, a preferred direction will exist — if physic conditions are determinant for the arrangement of the cells — in the sense of juxtaposition ¹⁾.

Owing to this preferred direction the number of layers from which the cortex is formed by migrating cells is not affected by the cell division. As the number of layers is not influenced by individual nucleus growth either, this number will not be influenced by the growth of the nuclei of the *anlage* at all, but is dependent on the rate of migration only.

As stated above during the stage of migration the equal number of

¹⁾ Juxtaposition of nerve cells is a phenomenon which is often found in the structure of the nervous system. ARIËNS KAPPERS (Vergl. Anat. d. Nervensystems, 1920-'21) pointed out that not only the cortex cerebri, but also the cortex cerebelli, the nucleus dentatus, the oliva inferior, the corpus geniculatum laterale, the tectum opticum, etc. tend to increase by surface extension, and therefore, have developed through juxtaposition. During their development all these organs are under the same influence of neurobiotactic powers. In principle the same mode of development as has been described for the neo-cortex accounts for the increase by surface extension of these organs.

layers is everywhere attended with an equal average nucleus size. Besides, the nucleus volume per column remains the same and is equally distributed in the developing cortex.

An other question is if towards the end of the ontogenetic growth this equal distribution of the nucleus volume is not interfered with the nucleus differentiation, resulting in such great differences in individual nucleus size. That this, however, is not the case, appears from the equal distribution of the nucleus volume in the adult, where this differentiation has reached its final stage.

A further analysis of the cortex gives explanation of this. In a former paper ¹⁾ it was shown that the nuclei of the adult cortex are subject to a rule of dispersion, namely: the dispersion of the nuclei of the neo-cortex is such that virtual globes, enveloping the nuclei and touching each other have surface areas, which are directly proportionate to the volumes of the enveloped nuclei ²⁾.

It will now be shown that this rule holds good also for the later stages of foetal growth, when nucleus differentiation sets in.

If the area of the surface of the enveloping globe is O and the volume of the enveloped nucleus is K , then

$$K (:) O.$$

As the surface area O of the globe is proportionate to the $2/3$ power of its volume T , it follows that

$$K (:) T^{2/3} \text{ or } T (:) K^{3/2}.$$

¹⁾ BRUMMELKAMP and VAN VEEN, loc. cit.

²⁾ Probably this mode of dispersion is connected with the metabolism of the nuclei, since the nuclei are placed in an environment on which the supply and removal of the metabolism products depends. It is imaginable that the supply and removal takes place via the surface of virtual globes. If the conveyance per area unit is constant, the exchange of metabolism products will be proportionate to the volumes of the nuclei, if the surface areas of the enveloping globes are proportionate to the volumes of the enveloped nuclei, which is indeed the case. As BOK (Psych. en Neurol. Bl., 1934) could show there is in nerve cells a direct proportion between nucleus volume and area of the surface of the cell body. If we imagine these cells expanded till they have reached the size of our virtual globes, then we at once see the agreement between the cell membrane and the surface of the virtual globe. On the ground of data of ERDMANN (Arch. f. Zellf. II, 1909) and KOEHLER (Arch. f. Zellf., VIII, 1912) this proportion between nucleus volume and cell area could also be demonstrated for *Strongylocentrotus lividus*; likewise on the ground of data of POPOFF (Arch. f. Zellf., I, 1908) for the dividing cells of *Frontonia leucas* and of GERASIMOV (Zeitschr. f. Allg. Phys., I, 1902) for the active surface of *Spyrogyra bellis*. — In this connection we further note that the greater part of the grey matter between the nuclei consists of optically empty space; only a small percentage of this space is occupied by dendrite and neurite fibres (BOK); this circumstance supports the theory that the function of the optically empty intermediate matter (on analogy of those of nutritive alveoli) is of a nutritive nature.

On the ground of the above the supposition is justified that the rule of dispersion applies not only to the nuclei of the full grown cortex, but also to the nuclei in the later stages of foetal growth, when nuclear differentiation is being accomplished. The correctness of this supposition is demonstrated in the above.

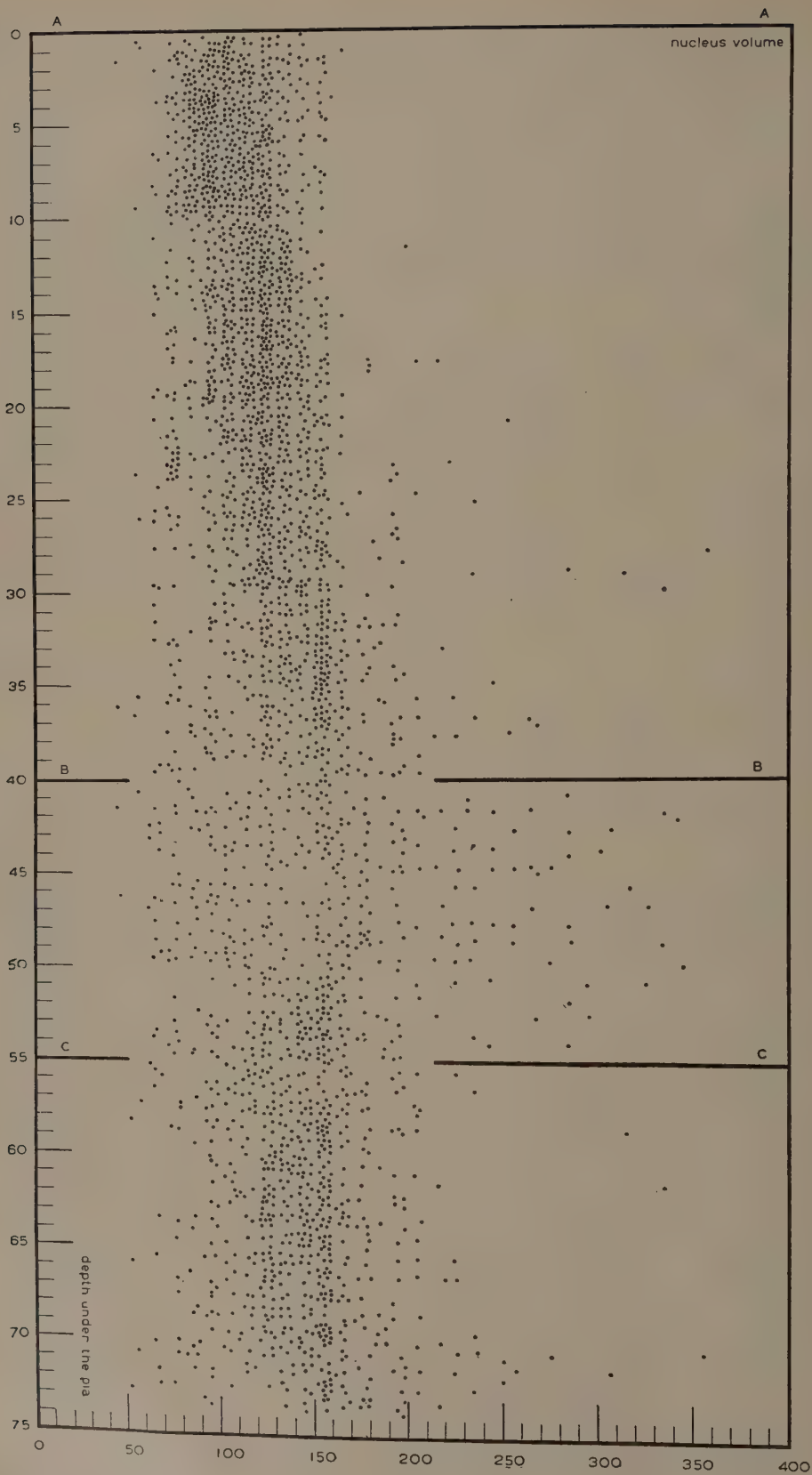


Fig. 7.

All the territories T_1, T_2, T_3, \dots per volume unit together form the total contents of that unit (if we neglect the dead spaces between the globes). So, $T_1 + T_2 + T_3 + \dots$ per volume unit, written as $[T]$ ¹⁾ will be constant and on account of $T (:) K^{3/2}$ therefore also

$$[K^{3/2}] = \text{constant.}$$

This deduction may be tested by comparing the average value of $[K^{3/2}]$ of layers with nuclei of small size, with the corresponding value of $[K^{3/2}]$ of layers with nuclei of large size. Such layers are given, for instance, in the cortex *anlage* of figure 1f. In fig. 7 are collected 2746 nuclei of area 2 of fig. 1f, by setting out on the X -axis the volumes of the nuclei and on the Y -axis the resp. distances of these nuclei from the lower surface of the lamina zonalis; as zero of the depth we took the highest point of the Y -axis, which gave an agreement between the actual depth of the nuclei and their position in the figure.

For the layers of small nuclei located between the lines AA and BB we find an average of $[K]$ equal to 5351; of $[K^{3/2}]$ to 60049; and of $[K^2]$ to 6922800. For the layers of large nuclei located between the lines BB and CC these values are 4608, 59474 and 7908800 resp.

From this it follows that the fluctuation is least in $[K^{3/2}]$, in other words, that this comes nearest to the ideal case, in which this value is constant, so that $[K^{3/2}]$ serves our purpose best.

Table II shows the summations of these powers side by side. The figures in brackets behind the experimental values represent the converted values found by supposing the averages of these experimental values to be 100 for each power. This shows at a glance the fluctuations round this average in percentages.

TABLE II.

	$[K]$	$[K^{3/2}]$	$[K^2]$
layers between AA and BB	5351 (107.1)	60049 (100.5)	6922800 (93.4)
layers between BB and CC	4608 (92.9)	59474 (99.5)	7908800 (106.6)

In fig. 8 we set out the procentual values of $[K]$; $[K^{3/2}]$; and $[K^2]$ of the layers between AA — BB and BB — CC . The lines connecting the various points show the fluctuations of the summations in percentages.

From this it follows that the dispersion of the nuclei, also in embryonic stages, is submitted to the rule:

$$T (:) K^{3/2}, \text{ or } K (:) T^{2/3}, \text{ or } K (:) O.$$

¹⁾ The symbol $[X]$ means in this article: " $X_1 + X_2 + X_3 + \dots$ per cortex volume unit".

As the area O of the globe is proportionate to the area of its greatest section S , it follows that

$$K (:) S.$$

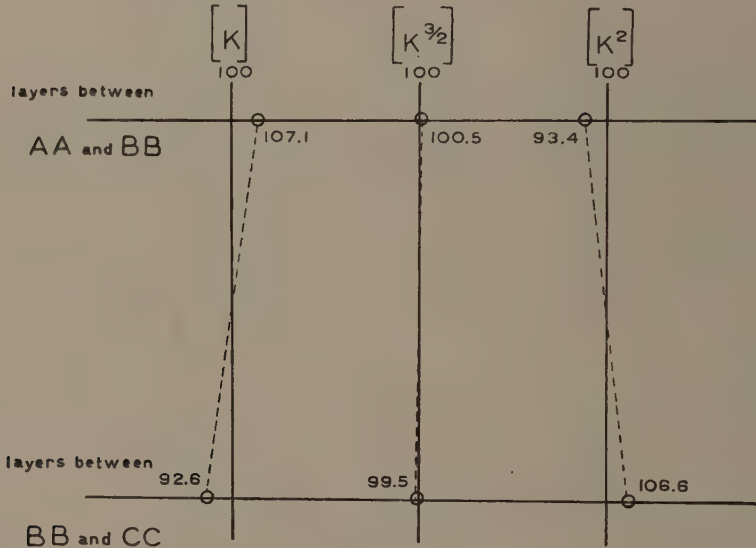


Fig. 8.

The number of globes, N , and hence the number of enveloped nuclei which may find a place per layer on the area unit is inversely proportionate to the section S :

$$N (:) 1/S$$

and hence the total quantity of nucleus volume, $N \cdot K$, which may be found per layer per area unit — indicated in the following by the product $(N \cdot K)$ — will be constant:

$$(N \cdot K) = \text{constant}.$$

In this formula the individual nucleus volume does not appear and, therefore, is not significant in respect to the total nucleus volume per layer per area unit. This also may be deduced from the following. Suppose, the individual nucleus volume is changed from K to (mK) , then the section of the enveloping globe will increase from S to (mS) , at the same time the number of globes which may be placed per area unit decreases from N to (N/m) . The quantity of nucleus volume, $(N \cdot K)$, originally found per layer on the area unit now becomes $(N/m) \cdot (mK) = N \cdot K$, so that it remains unchanged. This implies that a variation of the individual nucleus volume, as found in the adult cortex and in the later stages of embryonic development, does not affect the quantity of nucleus volume $(N \cdot K)$ per layer.

Since the number of layers, in the cortex is the same everywhere and is



Fig. 1a.



Fig. 1b.

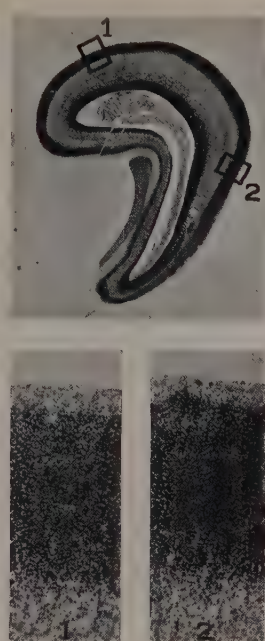


Fig. 1c.

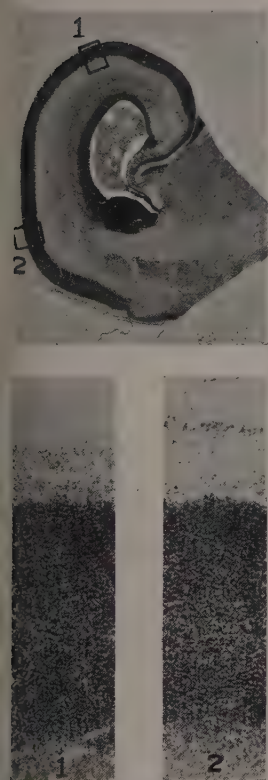


Fig. 1d.



Fig. 1e.

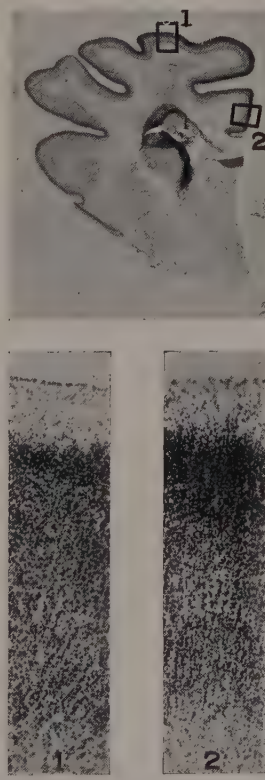


Fig. 1f.

Fig. 1a—1f. Foetal cortex of increasing age. The thickness of the cortex increases from stage to stage. Figures 1e and 1f show initial stages of cortex differentiation in layers. In each stage the cortex is of the same thickness in areas not influenced by curvature.

not affected by individual growth of the nuclei, the total quantity of nucleus volume per column will not be changed by the nucleus differentiation either.

What is affected by the nucleus differentiation, is, apart from the thickness and surface extension of the cortex, the number of nuclei which may be found per column. The number of nuclei per column will decrease to the same extent as the average nucleus volume increases. This was demonstrated above for the number of nuclei which may be present per layer per area unit. On account of the constancy of the number of layers, the same holds good for the number of nuclei per column (see schematic fig. 9).

In the foregoing pages we explained that the nucleus mass per column, though differing from stage to stage, is everywhere the same in each stage of development and therefore also in the adult stage. The developing neo-cortex originally contains only little nucleus volume per column; as foetal growth continues this quantity increases by means of migration. From the equal distribution in each stage of the total nucleus volume per column it follows that the growth intensity per column, though probably differing from stage to stage, is the same everywhere in each stage.

To this the following should be added: When measuring the extension of circumscript cortical fields in the ontogenetic development ¹⁾, it appears that the intensity in increase of surface extension of these fields, though varying from stage to stage, is the same everywhere in each separate stage ²⁾. This equal growth intensity per stage of the cortical fields implies a procentual increase of the number of cortex columns, which, per stage, will be the same everywhere.

From this procentually equal increase of the number of columns and the equal growth intensity of the nucleus volume per column it follows that, per stage, *the entire nucleus volume of the cortex (neo-cortex) is everywhere subjected to the same growth intensity.*

As to the cause of the equal growth intensity of the entire nucleus volume, we are inclined to assume a general factor which stimulates the growth of all neo-cortex nuclei either continuously or periodically. The simplest solution we can imagine is some growth stimulating substance (a hormone), inherent in the tissue fluids surrounding the cells and equally distributed in the developing neo-cortex. But this, of course, is a mere supposition.

¹⁾ Such areas may be limited by primary grooves.

²⁾ This I could show in sheep (Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XLIII, 8, 1940). On the equal growth of the neo-cortex during the ontogenesis of the sheep) and in collaboration with OFFRINGA in (Acta Neerl. morph. III, 2, 1940. The relative growth of the foetal brain during human onto- and phylogenesis).

Medicine. — *Détournements des différentes formes de nystagmus dans le système nerveux central.* III. Par A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

D. Détournements de l'arc réflexe par suppression d'un frein.

BYRNE ¹⁾ et FISCHER ²⁾ ont montré qu'après une excitation simultanée froide des deux labyrinthes, les deux nystagmus de sens opposé déclenchés à ce moment, ne se neutralisent pas simplement mais engendrent comme résultat un nystagmus vertical. RUTTIN ³⁾ avait déjà observé, bien avant les expériences de BYRNE et de FISCHER, l'apparition d'un nystagmus vertical battant vers le haut après injection bilatérale et simultanée des conduits auditifs, dans un cas d'anévrisme intracranien de la carotide interne et dans un cas de sclérose multiple. Un nystagmus vertical battant vers le bas après une excitation chaude bilatérale apparut aussi dans ce dernier cas.

Il essaya de même que BÁRÁNY ⁴⁾ au congrès de Copenhague en 1928, de démontrer ce phénomène par l'hypothèse suivante: La composante verticale du nystagmus calorique serait enrayée par le composant horizontal déclenché lors d'une excitation unilatérale. Ainsi deux nystagmus horizontaux, de sens contraire éveillés après une excitation calorique bilatérale des deux oreilles, seraient neutralisés. Dans ces conditions tout frein à l'apparition du nystagmus vertical serait supprimé à ce moment.

Il faut cependant envisager le fait que l'excitation unilatérale de l'oreille droite et de l'oreille gauche déclencha pour chacune d'elle un nystagmus vertical battant vers le haut. Par conséquent après une excitation bilatérale les deux nystagmus verticaux ne se neutralisent pas comme celles des nystagmus horizontaux et rotatoires, mais se renforcent doublement. Dans le but de mieux préciser la véracité de cette hypothèse quelques malades, ayant un nystagmus latent, furent très soigneusement étudiés. Ces malades ne présentent pas de nystagmus, les yeux étant libres mais si un oeil est couvert, ils présentent cette particularité d'avoir un nystagmus de l'oeil libre et découvert; par exemple: l'oeil gauche couvert, ils possèdent un nystagmus de l'oeil droit battant horizontalement vers la droite et inversement.

¹⁾ Cit. d'après BARANY.

²⁾ FISCHER, M. H., Pflügers Arch. **213**, 74 (1926).

³⁾ RUTTIN, E., Arch. f. Ohrh., **107**, 255 (1921).

⁴⁾ Comptes-rendus des séances réunies et publiées par Dr. N. RH. BLEGVAD, 1929.

Nous avons eu l'occasion d'étudier et d'examiner une femme âgée de 37 ans, ayant cette particularité (en date de 5.8.1932). En regard direct elle ne présentait presque jamais un nystagmus spontané. Un nystagmus très faible horizontal vers la droite pouvait être observé chez elle une seule fois. L'oeil droit couvert, un nystagmus horizontal battant vers la gauche se manifestait subitement à l'oeil gauche. En couvrant l'oeil gauche on observait un nystagmus horizontal vers la droite à l'oeil droit. Excitant le labyrinthe droit par 10 cc. d'eau froide (19° C.) la personne étant couchée en décubitus dorsal, nous voyions apparaître un nystagmus typique horizontal battant vers la gauche. Recommencant l'épreuve en ayant soin de couvrir l'oeil gauche afin de déclencher ainsi un nystagmus latent de l'oeil droit, le nystagmus latent disparaissait après quelques secondes, déprimé par la poussée nystagmique post-calorique (horizontal, battant vers la gauche). *Au cours de l'expérience les deux nystagmus antagonistes horizontaux ne se neutralisaient pas simplement, car un nystagmus vertical battant vers le haut apparaissait.*

L'excitation du labyrinthe gauche montrait le même phénomène lorsqu'on couvrait l'oeil de ce côté.

Par une épreuve très simple, on peut bien montrer qu'une simple neutralisation des deux nystagmus antagonistes horizontaux n'est pas capable de déclencher un nystagmus vertical. Dans ce but on produit un nystagmus post-rotatoire horizontal vers la gauche, l'oeil gauche étant couvert. Nous voyons ainsi deux nystagmus de sens contraire. Un nystagmus latent battant vers la droite et un nystagmus post-rotatoire battant vers la gauche. Ces deux formes de nystagmus se neutralisent véritablement car l'oeil libre ne présente aucune trace d'un nystagmus vertical.

Remarquons que ce nystagmus vertical engendré par l'excitation calorique dans des cas de nystagmus latent n'est pas toujours de même intensité.

Dans deux cas le nystagmus vertical ne pouvait pas se déclencher ⁵⁾ tandis que, dans deux autres cas il apparaissait après une excitation d'un côté et restait totalement invisible après excitation de l'autre côté. En voici un exemple:

Un garçonnet de 7 ans, jouissant d'une santé parfaite, présenta à l'examen du 8.11.1939 un nystagmus latent très typique.

Les deux yeux étant découverts, il avait un nystagmus spontané horizontal vers la droite. L'oeil droit fermé il se produisait un nystagmus latent horizontal vers la gauche. Lorsqu'il fermait l'oeil gauche on observait un renforcement bien visible du nystagmus spontané préexistant.

Si par l'épreuve rotatoire on produisait un nystagmus post-rotatoire, contraire au sens du nystagmus latent, on pouvait nettement voir le fait suivant:

1. Les deux nystagmus, étant de forces égales, se neutralisaient parfaitement,
2. Étant de forces différentes, le nystagmus post-rotatoire ou le nystagmus latent dominait.

Jamais on n'a pu observer un nystagmus vertical. Par l'épreuve calorique au contraire exécuté avec 50 cc. d'eau froide (19° C.) nous pouvions constater le phénomène suivant. L'excitation du labyrinthe droit déclenchait un nystagmus violent des deux yeux vers la gauche. Si à ce moment on couvrait l'oeil gauche, libérant ainsi le nystagmus latent vers la droite de l'oeil droit, on pouvait constater un abaissement progressif du nystagmus calorique jusqu'à sa disparition totale. A cet instant, l'oeil restait immobile, les deux nystagmus antagonistes étant de forces égales.

Depuis lors le nystagmus latent reprenait le dessus, constaté par

⁵⁾ Des cas analogues sont souvent mentionnés dans la littérature: e.a.: BRUNNER, Monatschr. f. Ohrenh., 58, 380 (1924); SOMMER, I., Monatschr. f. Ohrenh., 58, 606 (1924).

l'apparition du nystagmus horizontal battant vers la droite. Il n'y avait aucune trace d'un nystagmus vertical vers le haut comme dans le cas précédent.

L'excitation du labyrinthe gauche montrait le même phénomène. *Seulement, au moment où les deux nystagmus antagonistes étaient devenus de même force, on voyait nettement apparaître un nystagmus vertical vers le haut* ⁶⁾.

Dans les parésies horizontales du regard, on peut constater dans quelques cas l'absence totale du nystagmus horizontal calorique, qui par contre est remplacé par un nystagmus vertical. Ceci ne se présente pas souvent dans la série des cas étudiés ⁷⁾. Un cas bien typique de ce genre est le suivant:

Un garçonnet âgé de 6 ans, présentait une parésie congénitale du regard et une parésie congénitale et bilatérale du nerf facial. L'enfant doué d'une intelligence remarquable, ne présentait somatiquement aucune anomalie:

Examen olfactif (5.12.1939): normal.

Examen acoustique: normal.

Examen vestibulaire:

Troubles spontanés: impossibilité totale de porter le regard spontanément vers la gauche et vers la droite (même chose lorsque le patient voulait suivre un objet se déplaçant horizontalement devant lui voulait). Déplacement très réduit des yeux, mais sans trace de nystagmus pendant le regard vertical vers le haut et vers le bas.

Epreuve rotatoire: Absence totale de nystagmus horizontal post-rotatoire. Nystagmus rotatoire très faible obtenu après rotation à grande vitesse. Nystagmus vertical post-rotatoire vers le haut et le bas normal. Le signe de l'indication spontanée et la tendance à la chute du corps: normal.

Réactions d'adaptation de RADEMAKER et de GARCIN: très vives.

Epreuve calorique: (faite avec injection de 100 cc. d'eau de 15° C. dans le conduit auditif droit) déclenchait un nystagmus vertical battant vers le haut, interrompu par quelques secousses rotatoires vers la gauche. L'injection dans le conduit auditif gauche déclenchait un nystagmus vertical vers le haut entrecoupé de quelques secousses rotatoires vers la droite.

(Cet examen fait récemment est incomplet. L'épreuve calorique chaude et les positions compensatoires des yeux doivent être examinées dans une séance prochaine).

Le composant vertical du nystagmus calorique peut dans quelques cas se manifester seulement à un oeil dont voici deux exemples.

Madame A., âgée de 60 ans, avait été sujette à des crises de vertiges en se couchant. 15 jours avant son admission à la clinique (1.5.1939), la chambre semblait se déplacer

⁶⁾ Un oeil couvert, l'épreuve calorique chaude n'a pas été faite, dans ce cas-ci. Il est à prévoir que par l'excitation chaude il se déclenchera dans ces conditions un nystagmus vertical battant vers le bas. BARANY put observer dans quelques cas un nystagmus vertical battant vers le bas après excitation calorique chaude et unilatérale. (Mon. f. Ohrh., 40, 234 (1906).

⁷⁾ Un cas analogue présentant le même phénomène fut publié par FREEMAN. L'excitation calorique froide de l'oreille droite déclenchait un nystagmus vertical battant vers le haut chez son malade souffrant d'un gliome du pont (l'oreille gauche était inexcitable). Le nystagmus existait déjà avant l'apparition de la parésie débutante du regard. Le nystagmus horizontal post-rotatoire n'était pas détourné par un nystagmus vertical.

contrairement à la direction des aiguilles d'une montre. Elle avait constaté depuis deux ans une surdité de l'oreille gauche mais sans bourdonnements. Un examen bien conduit par le neurologue Dr. STENVERS et par l'interniste Dr. VAN LIER ne décelait rien de spécial à part une hypertension sanguine assez haute.

Examen acoustique:

Oreille gauche: voix chuchotée à 50 cm. Surdité type oreille moyenne.

Oreille droite: voix chuchotée, ad concham. Surdité type oreille interne.

Examen vestibulaire:

Troubles spontanés: pas de nystagmus spontané, pas de signe de l'indication spontanée.

Epreuve calorique: signe de l'indication réactionnelle: **normale**.

Le labyrinthe droit semblait plus excitable que le labyrinthe gauche à l'épreuve chaude et froide.

L'excitation de l'oreille gauche par 5 cc. d'eau de 35° C. déclenchait un nystagmus horizontal vers la droite à l'oeil gauche et un nystagmus vertical vers le bas à l'oeil droit.

L'excitation chaude et froide de l'oreille droite provoquait des réactions nystagmiques normales des deux yeux.

Une pneumonie mortelle nous a empêché de poursuivre notre examen. Remarquons ici le sens du nystagmus dirigé vers le bas et non vers le haut.

L'exemple suivant, rapporté en résumé, montre spécialement l'origine calorique de ce nystagmus vertical et exclut toute origine rotatoire ou autre.

Un homme, âgé de 22 ans, admis à la clinique en date du 19.6.1933, souffrait de troubles se rapportant à une tumeur cérébrale sans localisation précise d'après le rapport clinique neurologique. Les mouvements de l'oeil droit étaient intacts, l'oeil gauche présentait une paralysie du muscle droit interne. L'excitation calorique froide de l'oreille droite déclenchait un nystagmus horizontal des deux yeux vers la gauche.

L'excitation calorique froide de l'oreille gauche déclenchait un nystagmus classique horizontal de l'oeil droit vers la droite et un nystagmus vertical vers le haut de l'oeil gauche (paralysé du droit interne).

Signe de l'indication réactionnelle: normal.

L'épreuve rotatoire révéla un nystagmus horizontal, rotatoire et vertical classique des deux yeux dans les deux directions.

Nystagmus post-rotatoire horizontal:

10 tours dextrogyres (32"): nystagmus post-rotatoire horizontal vers la gauche, 25 secousses en 19".

10 tours lévogyres (32"): nystagmus post-rotatoire horizontal vers la droite, 54 secousses en 18".

WODAK et HERRMANN⁸⁾ avaient déjà rapporté des observations analogues. Deux cas où l'oeil était paralysé de l'oculo-moteur externe, présentaient un nystagmus vertical vers le haut lorsqu'on excitait à l'eau froide l'oreille qui normalement devait déclencher un nystagmus dans la direction de la paralysie. Ce nystagmus vertical apparaît sans faute si le regard est dirigé du côté paralysé. Par exemple: le muscle droit externe de l'oeil droit étant paralysé, on excite à l'eau froide le labyrinthe gauche, le regard du malade étant dirigé vers la droite.

Dans notre cas l'oeil étant paralysé du muscle droit interne, nous avons

⁸⁾ WODAK, E. et HERRMANN, G., Klin. Monatschr. f. Augenh. 75, 322 (1925).

déjà pu observer la même chose après excitation froide du labyrinthe gauche lorsque le malade regardait droit avant lui.

Soulignons donc que l'excitation calorique déclenchait un nystagmus de l'oeil invalide et une réaction nystagmique classique de l'oeil normal.

NORDMANN et METZGER⁹⁾ ont constaté chez un malade souffrant d'une tumeur avec affection pédonculaire, que l'un des yeux présentait un nystagmus vertical et l'autre un nystagmus horizontal calorique. BARRÉ¹⁰⁾ signale la fréquence de ces „dissociations du nystagmus dans les affections pédonculaires”.

GRAHE¹¹⁾ rapporte bien souvent l'absence du nystagmus horizontal expérimental et la présence du nystagmus vertical dans des lésions de la partie caudale des noyaux de *Deiters*. Il ne signale pas si cela se voit uniquement à l'épreuve calorique. TAMARI et SOMMER¹²⁾ relatent un fait bien remarquable chez certains syphilitiques congénitaux présentant le symptôme de HENNEBERT (nystagmus provoqué par compression d'un tympan normal).

La compression pneumatique bilatérale et simultanée des deux conduits déclenche un nystagmus vertical vers le haut, la compression unilatérale provoque un nystagmus horizontal rotatoire ou horizontal rotatoire des yeux. Ces formes nystagmiques sont analogues à celles obtenues par l'épreuve calorique.

Ces faits donnent l'impression que le nystagmus calorique et le nystagmus de HENNEBERT sont des réactions totales des labyrinthes et apparaissent d'après les circonstances par un nystagmus horizontal, rotatoire ou horizontal-rotatoire, tandis que le nystagmus vertical ne trouve pas l'occasion de se manifester¹³⁾. Il va de soi qu'en appliquant l'épreuve calorique ou compressive aux deux oreilles simultanément dans les cas présentant le symptôme de HENNEBERT, le nystagmus vertical apparaît par la neutralisation des deux nystagmus antagonistes horizontaux ou rotatoires ou horizontal-rotatoires.

MAUTHNER-POTZL¹⁴⁾ avaient observé chez un malade atteint d'un abcès

⁹⁾ NORDMANN, J. et METZGER, O., *Revue O.N.O.*, **18**, 17 (1930); UNTERBERGER, (*Ztschr. Hals-, Nasen- und Ohrenh.*, **36**, 221 (1934)) observait chez un malade atteint d'un gliome du pont un nystagmus vertical post-calorique d'un oeil.

¹⁰⁾ BARRÉ, J. R., *Revue O.N.O.*, **16**, 419 (1938).

¹¹⁾ GRAHE, K., *Hirn und Ohr*, Thieme, 1932.

¹²⁾ TAMARI, M., *Monatschr. f. Ohrenh.*, **62** 1246 (1928); **66**, 748 (1932); SOMMER, J., *Monatschr. f. Ohrenh.*, **66**, 349 (1932).

¹³⁾ Le symptôme de la fistule observé dans les otites chroniques est une réaction bien localisée du labyrinthe et se trouve par ce fait en dehors de la question.

RUTTIN, E., (*Monatschr. f. Ohrenh.*, **49**, 467 (1915): cas 43) décrit un malade qui souffrant d'une otite moyenne, présente le symptôme de la fistule des deux côtés. Par compression bilatérale et simultanée des deux conduits, aucun nystagmus vertical n'apparaît, mais une convergence des deux yeux se présente. Chaque oreille examinée séparément présentait le signe de la fistule.

¹⁴⁾ MAUTHNER, O., *Monatschr. f. Ohrenh.*, **59**, 672 (1925).

du cervelet, compliqué simultanément d'une encéphalite hémorragique d'origine otitique, une déviation vers le bas de l'oeil droit et une déviation vers le haut de l'oeil gauche après une excitation froide de l'oreille droite. Cette déviation se maintenait jusque 10 minutes après l'excitation. Il est très probable que cette observation ne se rattache pas au groupe de cas que nous venons de décrire dans cet exposé. Il me semble que le cas rapporté par MAUTHNER est plutôt une anomalie du tonus musculaire des yeux, qui se voit très souvent chez les animaux labyrinthectomisés expérimentalement, mais qui est rarement observée chez l'homme. Pour cette raison, le problème à résoudre se pose comme suit: „Le cas de MAUTHNER, est-il un détournement réel provoqué par l'excitation calorique?” Il me semble logique d'admettre l'hypothèse qu'ici l'excitation sensitive du conduit auditif externe (par injection d'eau froide) aurait pu déclencher cette déviation des yeux.

Les auteurs anglais et américains ¹⁵⁾ dissocient nettement le „perverted nystagmus” du „nystagmus inversé”. L'apparition, par exemple, d'un nystagmus vertical au lieu d'un nystagmus horizontal est dénommée „perverted nystagmus” tandis que leur „nystagmus inversé” est l'anomalie observée dans le sens du nystagmus, par exemple: un nystagmus réactionnel battant classiquement vers la droite est dirigé vers la gauche. Ce genre de nystagmus est très souvent décrit sous le nom de „nystagmus paradoxal”. L'étiologie de ce nystagmus est très vague et n'implique pas nécessairement un détournement comme cause. Cette forme paradoxale a déjà été étudiée avec le Dr. STENVERS ¹⁶⁾ et sera rapportée longuement par un des assistants de la clinique.

Résumé.

A l'appui de différentes observations cliniques, on peut montrer que des formes anormales de nystagmus engendrées le plus souvent par des processus pathologiques spécialement d'ordre central, peuvent être obtenues comme réactions aux excitations classiques d'un labyrinthe. Dans ces conditions l'influx nerveux (réflexe déclenché par une excitation déterminée) passant normalement par les voies nerveuses qui lui sont propres, est détourné sur d'autres voies nerveuses suivies habituellement par d'autres influx nerveux réflexes. Les causes capables de produire ces détournements dans le système nerveux central que nous avons pu constater sont au nombre de trois:

1. Certains produits toxiques, tel que la strychnine et la papavérine peuvent inverser le sens du nystagmus. L'alcool administré à fortes doses excitant ainsi l'organe otolithique par une position déterminée de la tête dans l'espace, provoque un nystagmus de position.

¹⁵⁾ e.a. JONES, I. H., *Equilibrium and vertigo*; Lippincott, Philadelphia and London, 1918.

¹⁶⁾ DE KLEYN, A. et STENVERS, H., *Revue de Laryng*, 53, 281 (1932).

2. Un blocage dans une ou plusieurs voies réflexes, localisé dans un nerf, dans un muscle ou dans le système nerveux central, peut produire un détournement des réflexes. Dans bien des cas on a pu préciser l'endroit du blocage situé soit dans un nerf moteur de l'oeil, soit dans le système nerveux central. Un exemple de blocage des yeux est rapporté aussi, où tous les muscles et nerfs respectifs de l'appareil moteur font défaut à l'exception du droit externe et de son oculomoteur externe.

3. La suppression d'un frein, qui est présent dans les conditions normales, déclenche un nystagmus vertical postcalorique. Des exemples où l'influence d'un frein peut être soupçonné sont observés jusqu'à l'heure actuelle, entre autres:

- a. dans l'excitation simultanée et calorique des deux conduits auditifs (RUTTIN, V. BYRNE, FISCHER, BARANY),
 - b. dans quelques paralysies partielles de l'oeil (WODAK, HERRMANN),
 - c. dans certains cas de nystagmus latent,
 - d. dans certaines parésies du regard.
-

Medicine. — Lésions partielles du huitième nerf crânien. I. Par A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Bien que le parcours intracérébral des fibres nerveuses de la huitième paire nous est assez bien connu dans la série animale inférieure, les connaissances anatomiques chez les mammifères sont très rudimentaires¹). L'étude physiologique et physio-pathologique laissent en plus supposer des trajets intracérébraux bien plus compliqués encore. Une analyse approfondie de plusieurs cas de lésions partielles de la huitième paire est une preuve probante en faveur de cette hypothèse. Par la précieuse et aimable collaboration des neurologues BOUMAN, BROUWER, HEILBRON, STENVERS et WINKLER j'ai depuis l'année 1909 eu l'occasion d'examiner un grand nombre de malades neuropathiques présentant aussi une souffrance du système audito-vestibulaire, produite par des lésions partielles du huitième nerf.

Depuis les deux dernières années les histoires cliniques sont devenus l'objet d'une étude que je me propose de rapporter ici.

Bien que tous les malades furent examinés par moi-même, il fut cependant difficile de comparer parfois les différentes données cliniques parce que la physiologie du système vestibulaire a évolué chaque jour pendant les trente dernières années et qu'en conséquence on fut obligé de remanier à différentes reprises nos méthodes d'examen afin de compléter nos données cliniques. Nous avons pu ainsi rattacher à nos examens les différentes formes du nystagmus de position, les réactions d'adaptation statique de RADEMAKER et GARCIN, et d'autres encore, appartenant antérieurement au domaine de la physiologie expérimentale. Les épreuves caloriques et rotatoires dépassé, exécutées d'une manière moins précise et agréable pour le malade, ne diffèrent pas tellement de celles exécutées à l'heure actuelle, que les résultats obtenus par ces deux méthodes ne seraient comparables.

Il est cependant de toute nécessité de préciser certains termes employés dans ce rapport.

Le terme „inexcitabilité du labyrinthe" ne précise pas une inexcitabilité totale mais signifie l'impossibilité de pouvoir déclencher un réflexe labyrinthique par les méthodes courantes employées en clinique. Il serait donc peut-être bien possible d'observer des réflexes par des excitations plus fortes. La même éventualité s'applique pour l'absence partielle des réflexes vestibulaires; par exemple la présence d'un nystagmus horizontal post-rotatoire et l'absence de la forme verticale et rotatoire signifie qu'une même vitesse rotatoire est capable de déclencher seulement une forme nystagmi-

¹) Voir: ARIËNS KAPPERS: Anatomie comparée des connexions centrales du huitième nerf dans la série des vertébrés (Societas Oto-Rhino-Laryngologica latina, Utrecht 1939).

que, mais n'exclue absolument pas l'apparition possible d'autres formes (verticale ou rotatoire) pour des vitesses rotatoires plus accélérées.

Le terme „nerf auditif ou nerf vestibulaire intact" n'exclue pas la présence d'anomalies minusculeuses de ces nerfs. Le grand perfectionnement audiométrique des dernières années permettant un dosage quantitatif assez précis de l'acuité auditive, ne décèle cependant pas encore de minimes anomalies de l'ouïe. Les examens vestibulaires sont bien plus incomplets encore car presque aucune donnée réellement quantitative nous est connue et nos méthodes d'examen sont encore trop grossières et peu raffinées ²⁾).

L'expérience scientifique acquise dans le domaine de la physiologie du labyrinthe, nous a montré la très grande sensibilité de cet organe. Les excitants employés couramment en clinique et intitulés „forts ou faibles" sont toujours trop forts pour détecter des anomalies légères de la fonction de l'équilibre. Aussi la recherche des réflexes toniques vestibulaires se pratique rarement encore et dans l'affirmative souvent d'une façon défec-
tueuse.

Afin de traiter plus méthodiquement l'étude des lésions partielles de la huitième paire, je rapporterai d'abord séparément les lésions isolées du nerf auditif et vestibulaire et ensuite les lésions partielles mêmes du nerf vestibulaire.

1. Lésions partielles du huitième nerf, localisées spécialement dans la partie auditive ou vestibulaire ³⁾.

Ces malades présentent spécialement une atteinte de la fonction auditive et une intégrité plus ou moins totale de la fonction vestibulaire ou inversement.

L'étiologie de ces tableaux cliniques se retrouve surtout dans:

- A. Les affections congénitales.
- B. Les fractures transversales de la pyramide pétreuse.
- C. Les otites.
- D. Les affections et souffrances du nerf huit.
- E. Les affections subites et isolées de la fonction auditive ou vestibulaire.

A. Les affections congénitales.

La surdi-mutité congénitale est bien l'affection type et la plus importante. On trouve chez ces infirmes, présentant souvent quelques restes auditifs, une différence bien prononcée entre une fonction auditive réduite à son minimum et une fonction vestibulaire quasi intacte à l'exception probablement pour les positions compensatrices des yeux.

Concernant ces dernières V. D. HOEVE ⁴⁾ put observer leur absence chez la souris dansante et leur présence chez la souris ordinaire. Nous avons

²⁾ Même une méthode clinique permettant d'enregistrer d'une façon précise le réflexe nystagmique est encore inconnue.

³⁾ Voir aussi e.a.: RAUCH: Monatschr. f. Ohrenh., 56, 292 (1922).

⁴⁾ V. D. HOEVE, J., Arch. of Ophthalmology, 51, 321 (1922).

pu confirmer cette observation chez une autre variété de la souris dansante. V. D. HOEVE examinant au moyen de l'appareil de *Javal* deux jeunes filles atteintes d'une surdi-mutité congénitale, ne put constater cependant aucune position compensatrice des yeux en fléchissant latéralement la tête vers les épaules. Les données d'un examen vestibulaire complet manquent malheureusement ici.

BÁRÁNY ⁵⁾ trouva contrairement dans presque tous ses cas de surdi-mutité congénitale non seulement la présence de réactions vestibulaires galvaniques, caloriques et rotatoires, mais aussi la présence bien souvent prononcée des positions compensatrices des yeux. HOUBEN et STRUYCKEN ⁶⁾ ont signalé avoir constaté dans 10 cas de surdi-mutité, ne présentant aucune réaction calorique et rotatoire, des valeurs relativement petites des positions compensatrices des yeux, tandis que ces valeurs étaient bien supérieures dans d'autres cas où on pouvait constater encore certains restes d'une audition et une légère excitabilité des labyrinthes.

KOMPAJENETZ ⁷⁾ ne précisant rien au sujet de l'origine congénitale ou acquise de la surdi-mutité a observé d'une part des cas où les positions compensatrices des yeux firent défaut, et où les autres réactions vestibulaires furent nettement présentes, mais observa aussi d'autre part quelques cas contraires.

Contre la méthode pour rechercher les positions compensatrices labyrinthiques des yeux, faite à la façon de BÁRÁNY, V. D. HOEVE, HOUBEN-STRUYCKEN et KOMPAJENETZ, se dresse une objection sérieuse par le fait que la tête se fléchit sur le tronc du malade pour obtenir une position déterminée de celle-ci dans l'espace, laissant ainsi des possibilités éventuelles de la présence de réflexes oculaires *cervicaux*. Cependant il est certain que dans bien des cas les réflexes cervicaux n'influençaient pas d'une manière probante les positions compensatrices des yeux car dans l'éventualité contraire V. D. HOEVE et KOMPAJENETZ auraient certainement trouvé dans *tous* leurs cas la présence des positions compensatrices des yeux. Cependant un cas publié antérieurement démontre la nécessité absolue d'éliminer toute possibilité de la présence de ces réflexes cervicaux ⁸⁾. C'était un cas de surdité bilatérale et totale ne présentant aucune réaction réflexe calorique et vestibulaire. Les positions compensatrices des yeux cependant étaient présentes ou absentes d'après que les réflexes cervicaux étaient éliminés ou pas. BENJAMINS et NIENHUIS ⁹⁾ n'ayant pas examiné des sourd-muets mais recherché correctement les positions compensatrices labyrinthiques des yeux n'ont pas observé des positions compensatrices des yeux dans le cas d'une traumatisée ayant ses deux labyrinthes totalement inexcitables.

⁵⁾ BÁRÁNY, R., Arch. f. Ohrenheilk., 68, 1 (1906). Des publications concernant des résultats obtenus par l'appareil perfectionné de BÁRÁNY (Acta Oto Laryngol., 8, 25 (1925) ne me sont personnellement pas connus).

⁶⁾ HOUBEN et STRUYCKEN, Acta Oto-Laryngologica, 7, 288 (1925).

⁷⁾ KOMPAJENETZ, S., Acta Oto-Laryngologica, 7, 323 (1925).

⁸⁾ DE KLEYN, A. and VERSTEEGH, C., Jnl. of Laryngology, 39, 686 (1924).

⁹⁾ BENJAMINS, C. E. and NIENHUIS, J. H., Arch. f. Ohrenheilk., 116, 241 (1927).

La présence des réflexes oculaires cervicaux chez des personnes souffrant de lésions localisées dans le système nerveux central est déjà bien connu ¹⁰⁾. BÁRÁNY ¹¹⁾ les avait observés chez le nouveau-né.

En résumé nous pouvons présumer que probablement les positions compensatrices des yeux sont présentes dans presque tous les cas de surdi-mutité congénitale où le labyrinthe répond encore aux excitations caloriques, galvaniques et rotatoires. Cette conclusion cependant est encore douteuse parce que toutes les méthodes encore employées par la plupart des auteurs n'excluent pas avec toute la certitude la présence éventuelle des réflexes cervicaux.

Nous trouvons en opposition les observations de V. D. HOEVE, qui a pu constater que les souris dansantes, atteintes de surdité congénitale, ne présentent aucune position compensatrice des yeux et a pu observer le même fait chez deux sourds congénitaux. KOMPAJENETZ observa de même que des sourd-muets examinés par lui, ne présentaient aucune position compensatrice des yeux, mais bien toutes les réactions labyrinthiques (caloriques, post-rotatoires et galvaniques). Remarquons d'une part que V. D. HOEVE ne donne aucune indication concernant les autres réflexes vestibulaires et que KOMPAJENETZ d'autre part dissimule l'origine congénitale ou acquise de la surdi-mutité. Il est donc bien difficile de tirer des conclusions définitives. Pour en arriver à ce point il est grandement nécessaire de trouver une méthode d'examen des positions compensatrices labyrinthiques des yeux simple et facilement réalisable et une méthode pratique d'exclusion totale du réflexe cervical. La découverte d'une telle méthode donnerait d'ailleurs chez l'homme une possibilité de pouvoir enregistrer quantitativement et couramment un réflexe tonique labyrinthique.

Aucune affection congénitale où la fonction auditive serait restée intacte et où la fonction vestibulaire serait totalement détruite est connue. Cela n'exclue cependant pas de possibilités de trouver des cas pareils. Il faut remarquer toutefois qu'une affection congénitale présentant des anomalies uniquement d'ordre vestibulaire, dissimule le plus souvent les symptômes indicatifs parce qu'une réaction de compensation parfaite dans le système nerveux central est fort probable. Pour ces raisons, l'examen vestibulaire se fait rarement chez ses malades. Si, par une maladie intercurrente, nos investigations cliniques nous poussent vers un interrogatoire des organes de l'équilibre, il est évident qu'une inexcitabilité labyrinthique, trouvée par l'examen, sera considérée comme étant secondairement acquise et non-congénitale.

L'organe périphérique est généralement le siège de la lésion chez les sourd-muets. L'étude anatomo-pathologique faite chez ces infirmes et les

¹⁰⁾ DE KLEYN, A. and STENVERS, H., Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 385 (1941).

¹¹⁾ BÁRÁNY, R., Acta Oto-Laryngologica, 1, 97 (1918).

travaux anatomiques des souris dansantes (travaux inspirés par QUIX¹²) et par VAN LENNEP¹³) démontrent cette localisation périphérique. Les recherches anatomiques de BROUWER¹⁴) chez le sourd-muet et de KUIPER¹⁵) chez la souris dansante trouvent cependant une affection du système auditif tant centrale que périphérique. Il est indispensable pour ces raisons que chaque cas de surdi-mutité congénitale et même acquise soit dans l'avenir soumis à un examen neurologique très précis. Ceci rentre également en ligne compte pour les surdités congénitales unilatérales.

En voici un exemple: un cas de surdi-mutité congénital unilatéral¹⁶) gauche semblait présenter une anosmie homolatérale.

B. *Fractures transversales localisées dans la pyramide pétreuse.*

Les différentes localisations possibles laissent prévoir plusieurs combinaisons de symptômes acoustiques et vestibulaires. Ces dernières furent déjà observées par la clinique et rapportées antérieurement avec le docteur STENVERS¹⁷). Depuis lors un grand nombre de cas de fractures de l'os temporal que STENVERS et moi-même ont diagnostiqués par un examen radiographique et acoustico-vestibulaire, se sont ajoutés aux précédents et confirment les observations antérieures.

1. *Fractures transversales localisées dans la pointe du rocher (fig. 1, ligne 1).*

La surdité du type labyrinthique¹⁸) et les troubles vestibulaires manquent plus souvent dans cette catégorie. Le syndrome de GRADENIGO caractérisé par la présence d'une paralysie de l'oculomoteur externe associée ou pas à des troubles du nerf trijumeau et classiquement typique dans les pétrosites, peut se présenter quelques fois.

Observation: V. R., Garçonnet de 13 ans¹⁹), renversé accidentellement par une

¹²) QUIX, F. H., Het gehoororgaan der Japansche dansmuis als type van doofstom dier. (Ned. Tijdschr. v. Geneesk., 26 (1906). Voir aussi Intern. Centralbl. f. Ohrenheilk., 5, 291 (1906).

¹³) VAN LENNEP, E. C. C., Het verloop der afwijkingen in het gehoororgaan van de Japansche dansmuis. (Diss. P. den Boer, Utrecht 1910).

¹⁴) BROUWER, H., Over doofstomheid en de acustische banen. (Diss. J. H. de Bussy, Amsterdam 1909).

¹⁵) KUIPER, F., Die funktionellen und hirnanatomischen Befunde bei der japanischen Tanzmaus. (Rotterdam v. Hengel 1913, Dissertation Amsterdam).

¹⁶) Il faut remarquer que les cas de surdité congénitale unilatérale sont plus nombreux que signalés dans la littérature. Dans certains cas le système vestibulaire est atteint, dans d'autres cas pas.

¹⁷) DE KLEYN, A. et STENVERS, H., Arch. f. Ohrenh., 103, 162 (1919).

¹⁸) On peut observer souvent une diminution de l'acuité auditive du type oreille moyenne provoquée par une hémorragie dans la caisse sans que la fracture n'a lésé la cochlée même.

¹⁹) Les observations des différents cas, de fractures mentionnées dans ce rapport, sont choisies spécialement parmi celles, publiées antérieurement dans l'Arch. f. Ohrenheilk. (l.c.). Des figures montrent dans ce rapport la localisation exacte et le trajet de chaque ligne de fracture. Pour cette raison un dessin schématisé est publié dans ce rapport, montrant les différents types des fractures (fig. 1).

charrette, perdait du conduit auditif externe un liquide sérosanguinal et présentait une plaie au pavillon de l'oreille droite. La perte de connaissance fut de courte durée mais après quelques jours le médecin constatait une paralysie du nerf facial et de l'oculo-moteur externe.

L'acuité visuelle et auditive droite étaient légèrement diminuées. Après quelques jours on avait observé une régression partielle de la paralysie faciale et de la surdité.

Six semaines après l'accident, j'ai pu examiner l'accidenté.

Examen auditif.

Oreille droite: Surdité type oreille moyenne, limite supérieure normale, RINNE négatif, SCHWABACH prolongé, WEBER latéralisé à droite.

Oreille gauche: normal.

Le tympan droit présentait une cicatrice au devant du marteau.

Le tympan gauche était normal.

Examen vestibulaire:

Excitabilité normale des deux labyrinthes. Signe de l'indication réactionnelle: typique.

Examen rhinologique:

Odorat normal des deux côtés.

Examen ophtalmologique:

Oeil gauche: acuité visuelle de 5/5. Mouvements oculaires intacts. Rétine normale.

Oeil droit: acuité visuelle de 5/10. Légère kératite neuromyolytique.

Examen interne: normal.

Examen neurologique:

Paralysie à droit de l'oculo-moteur externe et du facial. Anesthésie complète de la première et deuxième branche du trijumeaux. La troisième branche semblait à peu près intacte. En pleurant, l'oeil gauche larmoyait seulement.

Examen radiologique:

faite en incidence de STENVERS, montre une ligne de fracture en zig-zag passant par la pointe du rocher droit.

Cette fracture provoquait donc une paralysie de l'oculo-moteur externe droit et une anesthésie du trijumeau. Elle n'explique cependant pas la surdité constatée à l'oreille droite et la paralysie du facial, provoquées très probablement par une hémorrhagie traumatique dans la caisse. L'intégrité de cochlée est prouvée par l'épreuve de WEBER se lat ralisant dans ce cas à droite et par la limite supérieure normale.

2. *Fractures transversales du rocher, passant par le méat auditif interne (fig. 2, ligne 2).*

Ces lésions provoquent le plus souvent la destruction totale du huitième nerf crânien, éliminant ainsi complètement la fonction auditive et vestibulaire du labyrinthe. Un fait remarquable est l'intégrité totale du facial observée dans presque tous les cas.

Observation: V. R. Homme âgé de 22 ans, victime, passé six mois d'un accident de moto, présentait depuis ce jour une surdité totale à l'oreille gauche. Resté sans connaissance pendant un jour, il devait s'aliter pendant 3 à 4 semaines et ne présentait alors aucun trouble vestibulaire. La surdité était subjectivement le seul reliquat de son accident.

Examen auditif:

oreille droite: normale.

oreille gauche: surdité totale.

Examen vestibulaire:

Troubles spontanés: aucun (absence totale d'un nystagmus spontané, et du signe de l'indication spontanée).

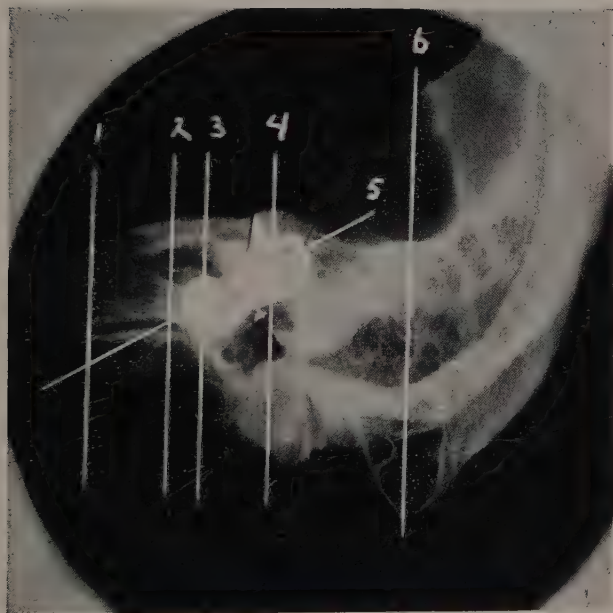


Fig. 1.

Epreuve calorique:

Excitabilité normale du labyrinthe droit. Inexcitabilité totale du labyrinthe gauche.

Epreuve rotatoire:

Dextrogyre: nystagmus horizontal post-rotatoire durée 21".

Lévogyre: nystagmus horizontal post-rotatoire durée 15".

Présence du signe typique de l'indication réactionnelle après rotation dans les deux directions.

Epreuves des positions compensatrices des yeux: Rotation compensatrice de 8° en position latérale droite. Rotation compensatrice de 0° en position latérale gauche.

Examen radiographique:

fait en incidence de STENVERS montre une ligne de fracture passant exactement par le méat auditif interne.

La radiologie confirmait d'une façon précise la surdité totale et l'inexcitabilité du labyrinthe gauche. Dans ce cas l'intégrité du nerf facial était totale.

3. *Fractures transversales du rocher passant seulement par la cochlée (fig. 1, ligne 3).*

Cette variété retrouve dans sa symptomatologie une abolition totale de la fonction auditive et donne très peu de troubles de la fonction vestibulaire.

Observation: D, homme de 43 ans, fut pris dans une mine entre deux wagonnets et relevé atteint d'une fracture de la base du crâne. Il saignait abondamment du nez, de la bouche et de l'oreille gauche. Souffrant déjà antérieurement d'une surdité prononcée bilatérale, il présentait depuis l'accident une surdité totale de l'oreille gauche. Afin de pouvoir préciser la cause éventuellement traumatique de son infirmité, il fut admis dans ce but à la clinique.

Examen auditif:

Oreille droite: surdité prononcée, voix chuchotée entendue à 30 cm. L'examen aux diapasons était du type oreille moyenne. Tympan: typique de l'otosclérose.

Oreille gauche: surdité totale (tympan typique de l'otosclérose).

Examen vestibulaire:

Excitabilité normale des deux côtés (examen calorique exécuté uniquement à l'eau froide). L'épreuve rotatoire déclenchait un nystagmus horizontal post-rotatoire d'une durée de 25" et 30" après rotation dextro- et lévogyre.

Examen radiologique:

(en incidence de STENVERS) montrait une ligne de fracture passant uniquement par la cochlée et laissant intact la partie vestibulaire du labyrinthe.

Cet examen confirmait la surdité totale à gauche et l'absence de troubles vestibulaires et d'anomalies objectives du même côté.

4. *Fractures transversales du rocher passant par la partie vestibulaire du labyrinthe (fig 1, ligne 4).*

Cette variété se caractérise par des troubles vestibulaires sans signes d'une surdité du type de l'oreille interne²⁰). Remarquons cependant que dans les cas du type 3 et 4, l'abolition totale de la fonction labyrinthique tant vestibulaire qu'auditive peut exister par des hémorragies traumatiques toujours possibles.

²⁰) La diminution de l'acuité auditive est souvent produite par une hémorragie dans la caisse (consécutives à la fracture) mais sans lésions de la cochlée.

Observation: V. T., âgé de 14 ans, tombait accidentellement d'une hauteur de 3 mètres sur le côté gauche de la tête. Pendant quelques instants seulement, il fut sans connaissance. Revenu à lui, il avait une impression de vertiges et son entourage semblait se déplacer vers la droite. Il saignait de l'oreille gauche et souffrait de céphalées et de bourdonnements. Il vomissait abondamment à plusieurs reprises. La présence immédiate d'un nystagmus spontané rapide horizontal rotatoire battant vers la droite, révélait déjà après l'accident une destruction totale du labyrinthe gauche. A l'exception des symptômes typiques d'une fracture du labyrinthe, ne fut trouvé aucun signe neurologique anormale.

L'examen, fait 4 semaines après l'accident, nous donnait les renseignements suivants:

Examen auditif:

oreille droite: normal.

oreille gauche: surdité type de l'oreille moyenne. Limite supérieure normale. RINNE négatif. SCHWABACH prolongé: tableau clinique d'une hémorragie probable dans l'oreille moyenne le jour de l'accident mais respectant entièrement la cochlée.

Le tympan gauche semblait présenter une cicatrice localisée dans la partie postérieure du tympan et parallèle au manche du marteau. Tympan droit: normal.

Examen vestibulaire:

Disparition complète du nystagmus spontané.

Epreuve calorique: inexcitabilité totale du labyrinthe gauche.

Excitabilité normale du labyrinthe droit.

Epreuve rotatoire: Après rotation dextrogyre: nystagmus horizontal: durée 10".

Après rotation lévogyre: nystagmus horizontal: durée 24".

Examen radiographique:

Incidence de STENVERS: une ligne de fracture semblait couper le rocher uniquement dans sa partie vestibulaire (fig. nr I, dans Arch. f. Ohrenheilk., 103, 164 (1919)).

L'examen radiographique expliquait les symptômes classiques d'une destruction vestibulaire et l'absence totale de signes cliniques attestant une lésion quelconque de l'oreille interne, abstraction faite de la surdité du type oreille moyenne.

5. *Fractures obliques du rocher passant simultanément par la partie cochléaire et vestibulaire du labyrinthe (fig. 1, ligne 5).*

Ces fractures occasionnent à la fois des troubles acoustiques et vestibulaires identiques à ceux décrits antérieurement pour les fractures du type II.

L'observation suivante est un exemple typique de ce groupe et est par sa forme un cas exceptionnel de fracture constatée chez une fillette de 3 ans. La naissance de l'enfant était normal, et la famille ne présentait aucune trace de troubles auditifs héréditaires. L'enfant s'était développé normalement depuis sa naissance et n'avait jamais présenté la moindre anomalie auditive car elle se réveillait la nuit au moindre bruit. A un an et demi elle savait déjà prononcer quelques mots comme: papa, maman, etc. Trébuchant un jour sur une grille d'égoût, elle restait en tombant sur le sol, sans connaissance pendant 7 heures. Une plaie soignante au front était le seul dégât provoqué par la chute. On n'a pu constater aucun saignement du nez et des oreilles. Il semblait toute fois par après que l'enfant était devenue complètement sourde et avait présenté une marche incertaine pendant les premiers jours consécutifs à l'accident.

Un examen fait après l'accident et un second un an et demi plus tard, donnait les données cliniques suivantes:

Examen auditif:

L'enfant ne réagissait à aucun bruit auquel tout enfant normal répondrait sans faute. On a pu confirmer peu après cette surdité absolue à l'école de sourd-muets qu'elle visitait depuis lors. Tympan normaux.

Examen vestibulaire:

Aucune réaction réflexe à déclencher par l'épreuve rotatoire et calorique.

*Examen interne: normal.**Examen sérologique:*

Réaction de BORDET-WASSERMANN: négatif.

Examen ophtalmologique:

Le fond de l'oeil révèle dans la rétine quelques taches atrophiques parsemées de quelques points noirs. Le front présente une ancienne cicatrice de la blessure cutanée.

Examen radiographique:

Cliché (incidence de STENVERS) pris à l'âge de 3 ans, montre une ligne de fracture très visible passant par la cochlée et par le vestibule du labyrinthe droit (voir Arch. f. Ohrenheilk., 103, 166 (1919), fig. 3).

Une chute accidentelle a été suffisante pour produire avec grande certitude une fracture de la pyramide de pétreuse droite, lésant ainsi sérieusement la partie cochléaire et vestibulaire. Aucune trace de fracture n'a pu être trouvée à gauche mais le fait n'exclue cependant pas sa présence quasi certaine bien que la radiographie a décélé seulement une fracture à droite après un an et demi.

6. *Fractures de l'os temporal passant par l'apophyse mastoïde (fig. 1, ligne 6).*

Ces fractures occasionnent rarement des troubles cochléaires ou vestibulaires mais causent bien souvent des lésions profondes dans le domaine du nerf facial.

Observation: ce cas est intéressant parce qu'on pouvait voir encore, 13 ans après l'accident, la ligne de fracture passant par la mastoïde. Homme, âgé de 25 ans, avait reçu à l'âge de 12 ans, un coup sur l'oeil gauche produit par la chute d'un bloc de bois. Se rappelant très peu des détails de l'accident, il pouvait nous raconter qu'il a encore pu se sauver et a du s'aliter pendant quelques jours. Une paralysie gauche de la face s'était installée de suite après l'accident.

Voici quelques données intéressantes extraites de l'examen clinique.

Examen neurologique:

Paralysie périphérique du facial gauche. Inexcitabilité du nerf pour des courants faradiques très hauts. La partie antérieure de la langue était insensible pour les goûts amers et sucrés mais sensible pour les goûts salés et sûrs.

*Examen auditif et vestibulaire: normal.**Examen radiographique:*

Une photo prise en incidence de STENVERS montrait une ligne de fracture passant nettement par la partie mastoïdienne de l'os temporal, qui se continuait vers le bas et vers l'intérieur pour se terminer ainsi au niveau de l'apophyse styloïde (voir Arch. f. Ohrenheilk., 103, 168 (1919), fig. 5).

Cette fracture, visible encore 13 ans après l'accident, avait entraîné une lésion grave du facial laissant intact le bloc labyrinthique.

Physics. — *Some Observations on the Spectra of Germanium.* By J. C. VAN DEN BOSCH and P. F. A. KLINKENBERG. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Introduction.

Hitherto the ZEEMAN-effect of the Ge-spectrum was not investigated. That is why a consolidation of the classification of GARTLEIN (1), RAO (5) and KIESS (3) for the Ge arc-spectrum, by LANG (4) and RAO (2) for the Ge spark-spectrum, was never given, nor an experimental consolidation of the theoretical g -values of the energy levels in the Ge atom. So we thought it desirable, as we had the disposal of some pure Ge metal, to research the ZEEMAN-effect of this element. Unfortunately a great deal of the spectrum escapes our observations, the vacuum spectroscopic region being not accessible with our means whereas the lines given by KIESS were not observed by us, because we worked under circumstances quite different from those of KIESS. In the trembler we used they did not appear; under these conditions, we assume the Ge atom is more easily ionised than excited. However the obtained data seem interesting enough to be reported here. Moreover by using the explosion apparatus described by DE BRUIN and LIER (6), the absorption spectrum of Ge I could be obtained of which some characteristics will be described.

Together with Ge I the first, second and third spark spectrum appeared on our plates. Partly the ZEEMAN-splittings could be measured and the observations are compared with the classification of the spark spectra.

The arc spectrum of Ge. Theoretical Considerations.

According to the classification of the Ge I spectrum the electron configuration of the ground state is $4p^2$ giving rise to a 3P , a 1S and a 1D term. The stronger lines arise from combinations of the $4p5s$ configuration, giving a 3P and a 1P , with the levels of the ground term. The weaker ultraviolet lines are due to combinations of the higher excited levels with the ground term and the lines above 5000 Å originate from combinations of those levels with $4p5s$.

For $4p^2$ and $4p5s$ the g -values of the levels can be computed from their relative positions by using GOUDSMIT's and HOUSTON's relations (7). Considering the slight deviation from the LANDÉ interval rule in the $4p^2$ 3P the coupling in the ground state is practically of RUSSELL-SAUNDERS' type so that the g -values of $4p^2$ 3P_2 , $4p^2$ 3P_1 and $4p^2$ 1D_2 are expected to be those of LANDÉ, that is 1.50, 1.50 and 1.00 respectively. More exactly the

calculation learns that the g -values should be 1.498, 1.500 and 1.002, the difference from the LANDÉ-values being too small to be checked with our experimental accuracy.

For the levels $4p5s\ ^3P_{2,1}$ and $4p5s\ ^1P_1$ we derive the g -values 1.500, 1.434 and 1.066 respectively, the deviations from the LANDÉ-values being greater than the uncertainty of our measurements.

To the higher ps configurations the simple calculation is not applicable as they are mixed with the pd ; this procures a mutual disturbance which must be accounted for. For instance the levels $4p6s\ ^3P_1$ and $4p4d\ ^3P_1$, both of odd parity, lie close to one another so that a strong perturbation is to be expected.

Experiments on the ZEEMAN-effect.

The *magnet* we used was the great water-cooled WEISS-magnet of the ZEEMAN-laboratory at Amsterdam. The current in the windings was 115 A. at a tension of 80 Volt. Then the magnetic field amounted, when the interferricum was about 5 mm. at a pole diameter of 1 cm., to 38000 Oersted. This was the maximum value for the field strength. We could control the constance of the current by means of a variable resistance. We measured the magnetic field strength with the aid of the known splittings of the Zn triplet $\lambda\ 4810.53$, $\lambda\ 4722.16$ and $\lambda\ 4680.14$. In the first order of the grating in stigmatic mounting the line $\lambda\ 4810.53$ was not resolved. So in this case we only used the lines $\lambda\ 4722.16$ and $\lambda\ 4680.14$. This also gave enough accuracy.

The *light-source* we first used was the ordinary BACK vacuum-trembler, described in detail by VAN DE VLIET (8). Later on we used a trembler which slightly differed from BACK's: the box had lateral faces, so that we need not use the enclosure by means of rubber rings.

First we used *Ge metal* in powder form. We pressed this powder with carbon and bachelite together in tablets which we used in the place of the metal pieces in the trembler. This was not successful, as we observed many W lines, originating from the negative W electrode, and only the Ge line $\lambda\ 3269.51$. When we used other metals in the same way, we also found a great deal of W lines in the spectrum. Later on we used pure Ge metal, which gave results in only a few cases. We were more successful in using an alloy of Ge and Zn or of Ge and Sn. As in both cases the spectra are not rich in lines, it did not give us much trouble to select the Ge lines.

The spectroscopic apparatus. We used the great hollow grating specially made by Prof. ROWLAND for Prof. ZEEMAN. It has 14437 lines per inch and is 6 inches wide. So the resolving power in the first order is 86500, in the second order 173000. The dispersion in the first order is 5.12 Å per mm. Its radius amounts to 6 m. We used the grating in the stigmatic mounting. We took photographs in the first and second order. The lines were too weak to make photographs in the third order. Then the exposures would be too long. On our first plates taken with the stigmatic mounting

we did not observe the important line λ 3124.83. So we also took photographs with a 2 m. grating in ROWLAND mounting. This grating had only 45000 lines in total, but it was much more brilliant. However its resolving power and dispersion were much smaller. The grating was not adjustable in this mounting. The part of the ROWLAND-circle, on which we could take the photographs was about 90 cm., which meant 8000 Å in the first order of the grating. The dispersion in the first order was about 8.9 Å per mm. In all cases Fe normals were used to identify the Ge lines.

A number of exposures were made with a HILGER El quartz spectrograph. Its resolving power is not sufficient for resolution of complicated splittings but its brilliancy allows the measurement of a few lines that were too weak to be photographed with the grating.

Results.

Table 1 gives the observed and calculated ZEEMAN-effect of the Ge I lines between 2400 and 4700 Å. That of the lines λ 2740.44, λ 2793.94, λ 2829.01 and λ 3067.14 could not be computed because of the perturbation mentioned before. It is however interesting that according to the observed ZEEMAN-effect of λ 2793.94 and λ 2829.01 the $4p6s^3P_1$ level should be very disturbed whereas the $4p4d$ level has a g -value which is exactly that of LANDÉ. As the lines were only measured by the aid of the El quartz spectrograph the data have but a relative value but in general there is a very satisfactory accordance between the measurements made with the El spectrograph and those made with the grating. The π -component of λ 2533.24 was not resolved as the line only appeared with the prism spectrograph. It should be noticed that the measurements of the σ -components of λ 3124.83 do not agree with theory. For the centre of gravity we find about 1.00 instead of 1.25. On the spectrograms taken with the stigmatic grating mounting the σ -polarisation looks very diffuse whereas it should have been resolved.

Wavelengths, intensities and classification are those of RAO (2).

In table 2 we have collected the g -values for the lower energy levels of the neutral Ge atom, calculated respectively from the observed ZEEMAN-effect, with the aid of the HOUSTON and GOUDSMIT formulas and for the ideal L-S-coupling by means of the LANDÉ-formula. For computing the experimental g -values the σ -polarisation of λ 3124.83 was not taken into account.

Table 3 contains the observed splittings of a number of Ge spark-lines together with the theoretical values for L-S-coupling. The agreement is very good having regard to the fact that many lines are very diffuse. Especially for the Ge III triplet λ 4178.96, λ 4260.85 and λ 4291.71 corresponding to that of Zn I λ 4680.14, λ 4722.16 and λ 4810.53, the agreement is striking.

Table 4 gives some unclassified lines. Among them are four lines at

about 4000 Å., of which LANG (4) remarks that they will belong to a multiplet $4s4f\ (^3F, ^1F)-4s5g\ (^3G, ^1G)$ of Ge III. The lines were very diffuse on our plates, so that the measurements were not very accurate. So we can not account for the correctness of LANG's proposal.

TABLE 1.

(I.Å.)	ν (vac.)	Int.	Class.	ZEEMAN-effect (obs.)	ZEEMAN-effect (calc.)
97.97	40020.37	15	$4p^2\ ^3P_0 - 4p5s\ ^1P_1$	(0) 0.98	(0) 1.076
33.24	39463.26	15	$4p^2\ ^3P_1 - 4p5s\ ^1P_1$	(0) 1.24	(0.434) 1.283
39.20	38610.41	12	$4p^2\ ^3P_2 - 4p5s\ ^1P_1$	(0) 1.71	(0) 1.764
92.55	38560.56	30	$4p^2\ ^3P_1 - 4p5s\ ^3P_2$	(0) 1.51	(0) 1.500
51.18	37707.79	30	$4p^2\ ^3P_2 - 4p5s\ ^3P_2$	(0) 1.52	(0) 1.499
51.58	37702.15	20	$4p^2\ ^3P_0 - 4p5s\ ^3P_1$	(0) 1.37	(0) 1.434
91.35	37145.05	30	$4p^2\ ^3P_1 - 4p5s\ ^3P_1$	(0) 1.45	(0) 1.467
99.63	36894.46	40	$4p^2\ ^3P_1 - 4p5s\ ^3P_0$	(0) 1.50	(0) 1.500
40.44	36479.77	20	$4p^2\ ^1S_0 - 4p4d\ ^1P_1$	(0) 1.03	—
54.60	36292.26	50	$4p^2\ ^3P_2 - 4p5s\ ^3P_1$	(0) 1.55	(0) 1.562
93.94	35781.29	10	$4p^2\ ^1S_0 - 4p6s\ ^3P_1$	(0) 1.28	—
99.01	35337.66	9	$4p^2\ ^1S_0 - 4p4d\ ^3P_1$	(0) 1.50	—
99.09	32895.09	60	$4p^2\ ^1D_2 - 4p5s\ ^1P_1$	(0) 0.96	(0) 0.938
7.14	32594.24	10	$4p^2\ ^1S_0 - 4p4d\ ^3D_1$	(0) 0.95	—
4.83	31992.49	20	$4p^2\ ^1D_2 - 4p5s\ ^3P_2$	(0.50) (1.00)	(0.498) (0.996) 0.504 1.002 1.500 1.998
9.50	30576.90	40	$4p^2\ ^1D_2 - 4p5s\ ^3P_1$	(0) (0.44) 0.54 1.01 1.41	(0) (0.432) 0.570 1.002 1.434
6.57	23653.24	50	$4p^2\ ^1S_0 - 4p5s\ ^1P_1$	(0) 1.06	(0) 1.066
5.84	21334.93	20	$4p^2\ ^1S_0 - 4p5s\ ^3P_1$	(0) 1.44	(0) 1.434

TABLE 2.

LEVEL	g (exp)	g (calc.)	g (LANDÉ)
$4p5s\ ^1P_1$	1.058	1.066	1.000
$4p5s\ ^3P_2$	1.499	1.500	1.500
$4p5s\ ^3P_1$	1.442	1.434	1.500
$4p^2\ ^1D_2$	0.989	1.002	1.000
$4p^2\ ^3P_2$	1.514	1.498	1.500
$4p^2\ ^3P_1$	1.476	1.500	1.500

TABLE 3.

λ (I. A.)	ν (vac.)	Int.	State	Class.	ZEEMAN effect (obs.)	ZEEMAN-effect (calc.)
2488.25	40176.7	30	IV	$5p^2P_{1/2} - 5d^2D_{3/2}$	(0) 0.86	(0) 0.84
2542.44	39320.5	20	IV	$5p^2P_{3/2} - 5d^2D_{5/2}$	(0) 1.08	(0) 1.10
2736.09	36537.7	30	IV	$4d^2D_{5/2} - 5p^2P_{3/2}$	(0) 1.20	(0) 1.10
2788.53	35850.6	30	IV	$4d^2D_{3/2} - 5p^2P_{1/2}$	(0) 0.89	(0) 0.84
2831.77	35303.2	20	II	$s4p^2^2D_{3/2} - s24f^2F$	(0) 0.75	} Partial PASCHEN-BAC effect
2845.47	35133.3	30	II	$s4p^2^2D_{5/2} - s24f^2F$	(0) 1.02	
3197.56	31264.8	25	III	$5p^3P_0 - 5d^3D_1$	(0) 0.53	(0) 0.50
3211.86	31125.6	35	III	$5p^3P_1 - 5d^3D_2$	(0) 0.98	(0) 1.00
3214.95	31095.7	25	III	$5p^3P_1 - 5d^3D_1$	(1.03) 0.98	(1.00) 1.00
1) 3255.36	30709.7	40	III	$5p^3P_2 - 5d^3D_3$	(0) 1.15	(0) 1.16
1) 3260.06	30665.5	20	III	$5p^3P_2 - 5d^3D_2$	(0.58) 1.27	(0.58) 1.33
3414.27	29280.5	20	III	$5p^3P_0 - 6s^3S_1$	(0) 1.94	(0) 2.00
3434.03	29111.6	40	III	$5p^3P_1 - 6s^3S_1$	(0.55) 1.69	(0.50) 1.75
3489.09	28653.3	40	III	$5p^3P_2 - 6s^3S_1$	(0) 1.08	(0) 1.25
3554.19	28127.8	60	IV	$5s^2S_{1/2} - 5p^2P_{3/2}$	(0.38) 0.99 1.65	(0.33) 1.00 1.67
3676.65	27191.0	50	IV	$5s^2S_{1/2} - 5p^2P_{1/2}$	(0.68) 1.36	(0.67) 1.33
4178.96	23919.6	200	III	$5s^3S_1 - 5p^3P_2$	(0) (0.49) 1.00 1.49 1.98	(0) (0.50) 1.00 1.50 2.00
4260.85	23462.9	200	III	$5s^3S_1 - 5p^3P_1$	(0.50) 1.50 2.00	(0.50) 1.50 2.00
4291.71	23294.2	150	III	$5s^3S_1 - 5p^3P_0$	(0) 2.00	(0) 2.00
4741.86	21082.3	50	II	$5p^2P_{1/2} - 5d^2D_{3/2}$	(0) 0.79	(0) 0.84
4814.80	20763.5	200	II	$5p^2P_{3/2} - 5d^2D_{5/2}$	(0) 1.10	(0) 1.10
5893.46	16963.2	10	II	$5s^2S_{1/2} - 5p^2P_{3/2}$	(0.33) 1.00 1.66	(0.33) 1.00 1.66
6021.14	16603.6	8	II	$\left\{ \begin{array}{l} 5s^2S_{1/2} - 5p^2P_{1/2} \\ s4p^2^2S_{1/2} - 4p^3^2P_{1/2} \end{array} \right.$	(0.68) 1.33	(0.67) 1.33

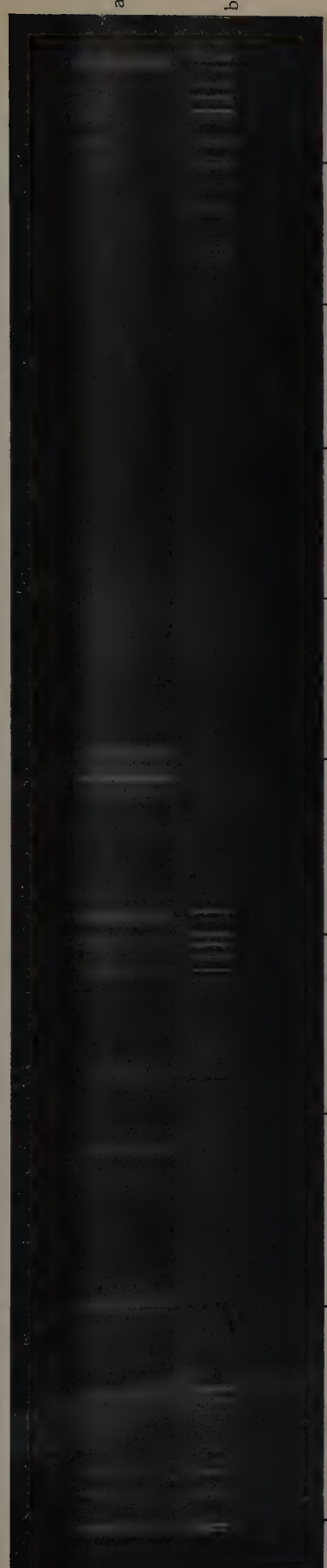
TABLE 4.

λ (I. A.)	ZEEMAN-eff. (obs.)	λ (I. A.)	ZEEMAN-eff. (obs.)	λ (I. A.)	ZEEMAN-eff. (obs.)
3) 2487.66	(0) 0.97	3) 3093.10	(0) 0.95	3) 4088.01	(0) 0.82
3) 2772.31	(0) 0.94	3) 3196.05	(0) 0.81	3) 4097.84	(0) 1.00
2) 3085.94	(0) 0.98	3) 4085.59	(0) 0.59	3) 4099.95	(0.31) 0.87

1) Wavelength from RAO (2).

2) Wavelength from EXNER and HASCHEK.

3) Own measurements.



2600 2700 2800 2900 3000
Fig. 5. Explosion spectrum of Ge. a. With open slit. b. With slit closed at the top.

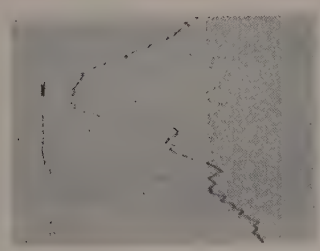


Fig. 6.
Photogram of λ 2754.60
in spectrogram 5a, made
with a Zeiss-microphoto-
meter.

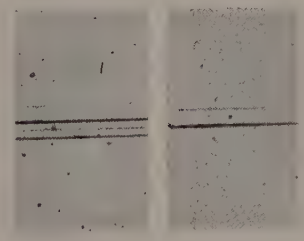


Fig. 1.
The lines λ 2651.19 and
 λ 2651.58 (Ge I).
Stigmatic mounting.
 π -components below.

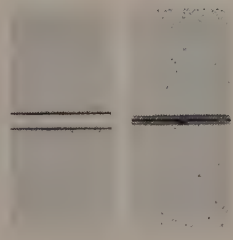


Fig. 2.
 λ 4178.96 (Ge III).
Stigmatic mounting.

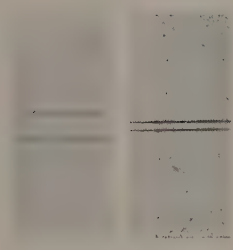


Fig. 3.
 λ 4260.85 (Ge III).
Stigmatic mounting.



Fig. 4.
 λ 4291.71 (Ge III).
Stigmatic mounting.

The explosion spectrum.

By discharging a condenser through a thin layer of metal, preferably in the form of a thin wire, the metal is suddenly evaporated with a loud detonation. The light which is momentarily emitted by the atoms of the inner parts of the vapour, where high temperatures and pressures can be reached, is absorbed by the atoms of the cooler parts so that an absorption spectrum is produced.

By varying the conditions of the discharge, the quantity of the metal and the form of the slit in which the explosion takes place the excitation can be changed and the atoms can be brought to absorption not only from the ground state but also from excited levels and even the absorption spectra of the ionized atom can be observed.

We could dispose on three explosion spectrograms of Ge taken by Dr. T. L. DE BRUIN with the aid of a HILGER El quartz spectrograph. The arrangement has been described by DE BRUIN and LIER (6) for thorium. As in the case of germanium no wires of the very crisp metal could be made a little quantity of pure Ge powder was put on the bottom of the slit in the wooden block and brought into contact with the electrode strips. A number of 5—10 explosions are sufficient to obtain a spectrogram.

The first exposure taken with an open slit, in the region from 3500 to 2450 Å showed a peculiar effect: the lines due to the combinations of the 4p5s configuration with the ground term except the intercombination lines like λ 3269.50 and λ 3124.83 show a very diffuse and broad emission top displaced towards the red with respect to the real wavelength, accompanied by two minima at the shorter wavelength side. Fig. 6 represents a photograph of this phenomenon at λ 2754.60. The wavelength of the first minimum was measured nearly equal to that of the undisplaced line so that it can be explained as an absorption minimum; this is in accordance with the fact that the intercombination lines do not show the phenomenon. The displacement of the broad maximum to the red is about 0.60 cm^{-1} for all the lines and is probably due to pressure effect. Computing a rough value for the pressure from the observed red displacements of Cu I λ 3247.54 and Ca II λ 3179.34 by using the data given by HUMPHREYS (9), we find nearly 250 atmospheres. From this value we derive for the Ge lines in question a pressure effect of about 0.0024 cm/atm. , in good agreement with HUMPHREYS' value for Ge λ 3039.09.

It is not clear to us what phenomenon will be responsible for the observed displacements towards shorter wavelength. STARK-effect and DOPPLER-displacements might play here an important rôle. The whole phenomenon is complicated by the fact that one explosion is not sufficient for a spectrogram and that the present plate was obtained with nine explosions. Care was taken in using always the same quantity of Ge powder but the other conditions like the more or less contact between the different particles, their sizes, etc. are not entirely reproducible.

A real absorption spectrum was obtained by shutting the slit at the top. This probably effects a greater vapour density at the edges. Except the intercombination lines which are very little absorbed all the lines corresponding to the ground state show strong absorption whereas the maxima have disappeared. A reproduction of this spectrogram is shown in Fig. 5b.

In conclusion the authors wish to express their sincere thanks to Prof. P. ZEEMAN for presenting this paper to the Academy, to Dr. T. L. DE BRUIN for drawing our attention to the subject and lending his absorption spectrograms, and to Mr. J. VAN DER ZWAAL for the great care bestowed on the reproductions.

Summary.

The ZEEMAN-effect of the stronger lines in the region 2450—6050 Å of Ge arc and spark spectra has been investigated and compared with theory. There is found a satisfactory accordance with the classifications of the spectra. Explosion experiments with Ge powder by the method of the exploding wire of ANDERSON are made and some details of the observed explosion and absorption spectrograms are described.

REFERENCES.

1. C. W. GARTLEIN, *Phys. Rev.* **31**, 782 (1928).
2. K. R. RAO and A. L. NARAYAN, *Proc. Roy. Soc. of London (A)* **119**, 607 (1928).
3. C. C. KIESS, *Nat. Bur. Stand. J. Res.* **24**, 1 (1940).
4. R. J. LANG, *Phys. Rev.* **30**, 762 (1927).
 ———, *Proc. Nat. Ac. Sc.* **14**, 32 (1928).
 ———, *Phys. Rev.* **34**, 696 (1929).
5. K. R. RAO, *Proc. Roy. Soc. of London*, **124**, 465 (1929).
6. T. L. DE BRUIN and J. N. LIER, *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **41**, 956 (1938).
7. W. V. HOUSTON, *Phys. Rev.* **33**, 297 (1930).
 S. GOUDSMIT, *Phys. Rev.* **35**, 1325 (1930).
8. H. J. VAN DE VLIET, *Het ZEEMAN-effect van de spectraallijnen van Cerium en Neodymium*; Thesis, Amsterdam, Jan. 1939.
9. W. J. HUMPHREYS, *Astroph. J.* **26**, 18 (1907).

ZEEMAN-laboratory of the University of Amsterdam.

April 1941.

Mathematics. — *Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie.*
(Vierte Mitteilung)¹⁾. *Der WEIERSTRASSsche Unbestimmtheitssatz.*
By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Der vorliegende Teil meiner Untersuchung¹⁾ enthält den Beweis für die intuitionistischen Uebertragungen des WEIERSTRASSschen Unbestimmtheitssatzes²⁾, für den Fundamentalsatz der Algebra und für eine von BROUWER herrührende, intuitionistische Ergänzung, die im Beweis des WEIERSTRASSschen Satzes Anwendung findet.

§ 1. Fundamentalsatz der Algebra.

Die Funktion $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ hat n Nullstellen.

Beweis. Setzen wir $M = 2(1 + \sum_{i=1}^n |a_i|)$, so gilt für $|z| \geq M$:

$$|f(z) - z^n| < \frac{1}{2} |z^n|, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mithin:

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{|z|=M} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = n.$$

Folglich hat $f(z)$ nach dem Hauptsatz der dritten Mitteilung n Nullstellen im Innern des Kreises $|z| = M$ und wegen (1) hat sie keine Nullstellen ausserhalb dieses Kreises.

§ 2. Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes.³⁾

Falls $a_k \neq 0$ ist, so hat die Funktion $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ wenigstens $n-k$ Nullstellen.

Beweis. Sei $|a_k| > \alpha > 0$, wobei $\alpha < 1$ gewählt werden darf.

Wir setzen $M = \frac{4}{\alpha} (1 + \sum_{k+1}^n |a_i|)$ und haben entweder:

$$\sum_0^{k-1} |a_i| M^{n-i} < \frac{1}{4} \alpha M^{n-k}$$

oder:

$$\sum_0^k |a_i| M^{n-i} > \frac{1}{8} \alpha M^{n-k}.$$

¹⁾ Vgl. diese Proceedings, Bd. 44, S. 173, 276, 420.

²⁾ Diese Uebertragungen wurden schon mitgeteilt in Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 34, 1395—1397 (1931).

³⁾ L. E. J. BROUWER. Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 27, 631—634 (1924).

Im ersten Fall ist für $|z| = M$ offenbar $|f(z) - a_k z^{n-k}| < \frac{1}{2} |a_k z^{n-k}|$, mithin:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=M} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = n - k.$$

Folglich hat $f(z)$ in diesem Fall $n - k$ Nullstellen im Innern des Kreises $|z| = M$. Im zweiten Fall gibt es ein $a_l \neq 0$ mit $0 \leq l < k$. Ist $l = 0$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Fundamentalsatz. Ist $l > 0$, so wiederholen wir das Beweisverfahren mit l statt k . Nach höchstens k -maliger Wiederholung folgt also die Behauptung unseres Satzes.

§ 3. **Satz I.** *Es sei $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion, d.h. es sei $f(z)$ überall regulär und es existiere zu jedem positivem A ein ganzes $n > A$ derart, dass $f^n(0) \neq 0$ ist. Es seien weiter zwei positive Zahlen $\varepsilon < 1$ und R und eine komplexe Zahl w beliebig vorgelegt. Alsdann lässt sich ein solches z_1 mit $|z_1| \geq R$ bestimmen, dass $|f(z_1) - w| < \varepsilon$ ist.*

Beweis. Wie aus der Betrachtung von $F(z) = f(Rz) - w$ ersichtlich, können wir ohne wesentliche Beschränkung $R = 1$ und $w = 0$ setzen. Sei R_1 eine positive Zahl > 1 . Es ist entweder $|f(z_1)| < \varepsilon$ für wenigstens einen Punkt z_1 in dem Ring $1 \leq |z| \leq R_1$, oder $|f(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$ für jeden Punkt dieses Ringes. Nur den letzten Fall brauchen wir weiter zu betrachten. Sei:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=R_1} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = m \geq 0.$$

Falls $m > 0$ ist, bezeichnen wir das Nullstellenpolynom ⁴⁾ von $f(z)$ in dem Kreise $|z| = R_1$ mit $P(z)$; sonst setzen wir $P(z) = 1$. Alsdann ist $\frac{f(z)}{P(z)}$ innerhalb des Kreises $|z| = R_1$ regulär und $\neq 0$ ⁴⁾, und es gilt dasselbe für die Funktion $\frac{P(z)}{f(z)}$, die wir mit $h(z)$ bezeichnen. Insbesondere ist also $h(0) \neq 0$.

Wir bestimmen folgenderweise entweder ein solches $p > 0$, dass $h^{m+p}(0) \neq 0$ ist, oder ein solches z_1 , dass $|f(z_1)| < \varepsilon$ ist. Sei μ eine solche positive Zahl, dass $|P(z)| < \mu |z^m|$ ist, sobald z , dem absoluten Betrage nach, grösser als Eins genommen wird. Wir wählen $n > m$ derart, dass $f^n(0) \neq 0$ ist. Wegen:

$$P^n(0) = h^n(0) f(0) + \binom{n}{1} h^{n-1}(0) f'(0) + \dots + h(0) f^n(0) = 0,$$

gibt es eine von Null entfernte Ableitung $h^k(0)$. Falls $k \leq m$ ist, so

⁴⁾ Vgl. den Hauptsatz der dritten Mitteilung, diese Proceedings, Bd. 44, S. 420.

bestimmen wir nach dem Satz von § 2 eine Nullstelle x der Funktion $h(0) + \sum_1^m \frac{z^j h^j(0)}{j!}$. Sei nun $R_2 = R_1 + |x|$. Es ist entweder: $|f(z_1)| < \varepsilon$ für ein gewisses z_1 in dem Ring $R_1 \equiv z \equiv R_2$, oder: $|f(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$ für jeden Punkt des Ringes $R_1 \equiv z \equiv R_2$. Wir brauchen nur den zweiten Fall zu betrachten. In diesem Fall ist $h(z)$ regulär für jedes $|z| \equiv R_2$. Da $h(x) = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{x^j h^j(0)}{j!} \neq 0$ ist, lässt sich $p > 0$ so bestimmen, dass $h^{m+p}(0) \neq 0$

ist. Sei $|h^{m+p}(0)| > \alpha > 0$ (I) und $R_3 = R_2 + \sqrt[p]{\frac{2^{\mu}(m+p)!}{\alpha \varepsilon}}$ (II) ⁵⁾.

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung $|f(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$ nicht für jeden Punkt des Ringes $R_2 \equiv z \equiv R_3$ erfüllt sein kann und dass sich folglich ein solches z_1 mit $R_2 \equiv z_1 \equiv R_3$ bestimmen lässt, dass $|f(z_1)| < \varepsilon$ ist. Denn wäre $|f(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$ in $R_2 \equiv z \equiv R_3$, so wäre $h(z)$ dort regulär und dem absoluten Betrage nach $< \frac{2^{\mu} R_3^m}{\varepsilon}$. Wegen (II) wäre dann:

$$|h^{m+p}(0)| = \left| \frac{(m+p)!}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{|z|=R_3} \frac{h(z) dz}{z^{m+p+1}} \right| < \alpha,$$

entgegen der Ungleichung (I).

§ 4. Satz von WEIERSTRASS.

Es sei $f(z)$ regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und es sei z_0 eine wesentlich singuläre Stelle, d.h. zu jeder vorgelegten positiven Zahl A existiere eine solche ganze Zahl $m > A$, dass der Koeffizient b_m der für $0 < |z - z_0| < R$ gültigen LAURENTSchen Entwicklung:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

$\neq 0$ ist. Es seien weiter zwei positive Zahlen ε und $r < R$ und eine komplexe Zahl w beliebig vorgelegt. Alsdann lässt sich ein z_1 mit $0 < |z_0 - z_1| < r$ so bestimmen, dass $|f(z_1) - w| < \varepsilon$ ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $R = 1$, $z_0 = 0$ und $w = 0$. Für $0 < |z| < 1$ hat man:

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n + \sum_0^{\infty} b_n z^{-n} = \varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\varphi(z)$ im Innern des Kreises $|z| = 1$ regulär und $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ bzw. $\psi(\zeta)$

eine ganze transzendente Funktion von $\frac{1}{z}$ bzw. ζ ist. Bestimmt man nun $r_1 < r$ derart, dass $|\varphi(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ bleibt, sobald $|z| < r_1$ genommen wird

⁵⁾ In dem Fall, dass schon $k > m$ ist, sei $R_2 = R_1$.

und wählt man dann nach dem vorigen Satz ζ_1 mit $|\zeta_1| > \frac{1}{r_1}$ derart, dass $|\psi(\zeta_1)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so hat man $\left|f\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)\right| < \varepsilon$ und $0 < \left|\frac{1}{\zeta_1}\right| < r$, w.z.b.w.

§ 5. Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes.

Es sei $f(z)$ regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und es seien zwei positive Zahlen $r < R$ und ε und eine komplexe Zahl w derart gegeben, dass für $0 < |z - z_0| < r$ $|f(z) - w| > \varepsilon$ ist. Alsdann ist der Punkt z_0 entweder regulär oder ein Pol von bestimmter Ordnung, d.h. für die Koeffizienten b_n der LAURENTSchen Entwicklung:

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_0^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

lässt sich $m \geq 0$ so bestimmen, dass $b_m \neq 0$, jedoch $b_{m+i} = 0$ ist.

Bemerkung. Dass nicht jeder Pol eine bestimmte Ordnung hat, erkennt man an Beispielen wie $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z^2}$, wo α eine Zahl ist, für die weder $\alpha = 0$ noch $\alpha \neq 0$ festgestellt ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R = 1$, $z_0 = 0$ und $w = 0$. Wir setzen wieder:

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n + \sum_0^{\infty} b_n z^{-n} = \varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$$

und bestimmen $r_1 < r$, sodass für $|z| \leq r_1$:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ mithin: } \left|\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right| > \frac{1}{2}\varepsilon \quad \dots \quad (I)$$

ist. Sei nun

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=\frac{1}{r_1}} \frac{\psi'(z) dz}{\psi(z)} = m.$$

Wir behaupten, dass $z=0$ ein regulärer Punkt oder ein Pol m -ter Ordnung ist, je nachdem $m=0$ oder $m>0$ ist. Denn sei $P(z)$ das Nullstellenpolynom von $\psi(z)$ innerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{r_1}$. (Falls $m=0$ ist, sei $P(z)$ die Zahl Eins.) Sei μ eine solche positive Zahl, dass:

$$|P(z)| < \mu |z^m| \quad \dots \quad (II)$$

bleibt, sobald $|z| > \frac{1}{r_1}$ ist. Setzen wir dann $h(z) = \frac{P(z)}{\psi(z)}$, so gilt für jedes

ganze p und jedes positive η : $|h^{m+p}(0)| < \eta$. Setzt man nämlich $\varrho = \frac{1}{r_1} + \sqrt[p]{\frac{2^{\mu(m+p)!}}{\varepsilon \eta}}$, so folgt aus (I) und (II):

$$|h^{m+p}(0)| = \left| \frac{(m+p)!}{2\pi \sqrt[p]{-1}} \int_{|z|=\varrho} \frac{h(z) dz}{z^{m+p+1}} \right| < \eta.$$

Es ist also $h^{m+p}(0) = 0$ für jedes $p > 0$. Falls nun $m = 0$ ist, so ist $h(z)$, folglich auch $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ konstant, mithin $f(z)$ in der Tat regulär im Punkte $z = 0$. Falls dagegen $m > 0$ ist, so kann die Ungleichung $h^p(0) \neq 0$ nicht für $p > 0$ erfüllt sein, denn sonst könnte man nach dem Satz von § 2 eine Nullstelle von $h(z)$ bestimmen, während jedoch $h(z) \neq 0$ für jedes z gilt. Auch in diesem Fall ist $h(z)$ also konstant. Es ist mithin $\psi(z)$ ein Polynom m -ten Grades in z und der Punkt $z = 0$ ein Pol m -ter Ordnung von $f(z)$, w.z.b.w.

Mathematics. — *Die LIESchen Fundamentalsätze in bewerteten Körpern.*
By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Wir werden jetzt die LIESchen Fundamentalsätze einer Untersuchung unterwerfen. Dazu definieren wir zunächst:

Ein r -dimensionaler Raum heisst K -Raum, wenn die „Punkte“ a dieses Raumes geordneten Mengen (a_1, \dots, a_r) der r Koordinaten a_i sind, worin jedes a_i einem vollständig bewerteten Körper K entnommen ist.

Wir denken uns eine Gruppe G zusammengesetzt aus den Gruppenelemente, die Punkte eines r -dimensionalen K -Raumes sind. Die Gruppenelemente a, b, c, \dots sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:

10. Es ist eine Zusammensetzungsvorschrift gegeben, welche jedem Elementepaar a, b von G ein drittes Element c von G zuordnet, welches man meistens das Produkt von a und b nennt und mit $a \cdot b$ bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass

$$c_v = \varphi_v(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r) \quad (v = 1, 2, \dots, r)$$

eine analytische Funktion der Gröszen a_i and b_k sei.

20. Für je drei Elemente a, b und c von G gilt:

$$ab \cdot c = a \cdot bc \quad (\text{Assoziativgesetz}).$$

30. Es existiert ein Einselement e in G mit der Eigenschaft $ea = a$ für alle a von G .

40. Zu jedem a von G existiert ein inverses a^{-1} in G , so dass $a^{-1} \cdot a = e$. Bezeichnen wir diese Gruppen mit K -Gruppen, dann handelt es sich nun um die Frage, wiefern die LIESchen Fundamentalsätze, die im Körper der komplexen Zahlen gültig sind, für K -Gruppen ihre Gültigkeit beibehalten.

Sei W ein n -dim. K -Raum, und sei jedem Element a der K -Gruppe eine eindeutige Abbildung $f_a(x)$ des Raumes W auf sich selbst zugeordnet.

Die Abbildungen mögen folgende Bedingungen erfüllen:

$$f_{ab}(x) \equiv f_a(f_b(x)); f_e(x) \equiv x. \quad (1)$$

Wir setzen voraus, dass die $f_a(x)$ analytische Funktionen ihrer Veränderlichen sind.

Der Inhalt des ersten Fundamentalsatzes ist, dass jede r -gliedrige Gruppe gewissen Differentialgleichungen genügt und umgekehrt, dass jedes System von Abbildungen (Transformationen), das solchen Differen-

tialgleichungen genügt und ausserdem die identische Abbildung enthält, eine r -gliedrige Gruppe bildet.

Der erste Teil des Beweises benutzt die Relationen (1). Durch Verbindung der Gleichungen

$$x' = f_a(x); x'' = f_b(x')$$

ergibt sich ein drittes Gleichungssystem von entsprechender Form:

$$x'' = f_b(f_a(x)); x''' = f_c(x)$$

während

$$c_k = \varphi_k(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r) \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Von den Gleichungen $f_b(x') = f_c(x)$ werden wir zunächst ausgehen. Betrachtet man in denselben x , a und c als unabhängige Veränderliche, die x' und die b vermöge der Gleichungen $x'_i = f_a(x)$, $c_k = \varphi_k(a, b)$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen, so erhält man auf genau dieselbe Weise wie S. LIE¹⁾: Stellen die Gleichungen $x' = f_a(x)$ eine K -Gruppe dar, so genügen die x' , als Funktionen von a und x betrachtet, gewissen Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^r \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

Hier verschwindet die Determinante der $\psi_{\rho k}(a)$ nicht identisch. Ausserdem ist es unmöglich, r solche von x' unabhängige und nicht sämtlich verschwindende Grössen e_1, e_2, \dots, e_r anzugeben, dass die Ausdrücke

$$\sum_{\rho=1}^r e_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

gleichzeitig verschwinden.

Für die Umkehrung der ersten Hälfte des ersten Fundamentalsatzes benutzen wir die Existenz der Lösungen des simultanen Systems von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit Anfangsbedingungen.

Wenden wir dies an auf die eingliedrigen Gruppen, welche definiert sind durch $x' = f_a(x)$, so genügen die f vermöge (2) den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a} = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \psi(a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

¹⁾ S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen I.

(worin $\psi(a)$ eine analytische Funktion von a ist), oder

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (\text{mit der Anfangsbedingung } x'_i = x_i \text{ für } t=0)$$

durch Einführung des Parameters t .

Es ist x'_i eine analytische Funktion der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n, t , also

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} Xx_i + \frac{t^2}{2!} X^2 x_i + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

worin

$$Xx_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x'_i = x_i \text{ für } t=0).$$

Man nennt X einen Differentialoperator. Ist F eine beliebige Funktion der x_i , so definiert der Differentialoperator

$$X(F) = \sum_{h=1}^r \xi_h(x) \frac{\partial F}{\partial x_h}$$

eine infinitesimale Transformation.

Jede eingliedrige Gruppe $x' = f_a(x)$ bestimmt nur eine infinitesimale Transformation und umgekehrt bestimmt eine infinitesimale Transformation eine eingliedrige Gruppe.

Man nennt die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k f = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

unabhängig, wenn es keine Relation $\sum_{m=1}^r \lambda_m X_m f = 0$ gibt, in welcher die λ_m von den x unabhängige Größen und nicht alle Null sind.

Jede infinitesimale Transformation $\sum_{m=1}^r \lambda_m X_m f = C(f)$ erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen die Form haben

$$\bar{x} = x + \frac{t}{1} C(x) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} C^2(x) + \dots$$

Denken wir uns die λ_i als willkürliche Parameter, so erhalten wir eine ganze Schar von eingliedrigen Gruppen, wovon man einfach zeigt, dass die r Parameter λ_i sämtlich wesentlich sind.

Wir können nun einfach die Umkehrung der ersten Hälfte des ersten Fundamentalsatzes beweisen.

Von den Gleichungen $x' = f_a(x)$ wollen wir voraussetzen, dass sie eine Schar von Transformationen darstellen, dass die f die oben erwähnten

Eigenschaften besitzen, und dasz sie Differentialgleichungen von der besonderen Form

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{jk}(a) \xi_{ji}(x') \quad (3)$$

genügen.

Es sind dann die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k f = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

von einander unabhängig.

Wir können die Differentialgleichungen (3) auch in die Form

$$\xi_{ji}(x') = \sum_{k=1}^r a_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, r)$$

schreiben. Stellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ r willkürliche Konstanten dar, so ist

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(x') = \sum_{k=1}^r \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \sum_{j=1}^r \lambda_j a_{jk}(a).$$

Wir benutzen einen neuen Parameter t , so dasz man die a auffassen kann als Funktionen der λ und t die der Differentialgleichung

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^r \lambda_j a_{jk}(a) \quad (a_i = a_i^{(0)} \text{ für } t=0) \quad (k=1, \dots, r)$$

genügen. Also

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^r \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} = \frac{dx'_h}{dt}.$$

Sei

$$X_j f = \sum_{h=1}^n \xi_{jh}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

so ist

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j f = \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{jh}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_h} \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{jh}(x).$$

Setzt man

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j f = X f \quad ; \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{jh}(x) = \xi_h(x),$$

so ist

$$X f = \sum_{h=1}^n \xi_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

Diese infinitesimale Transformation erzeugt eine eingliedrige Gruppe, welche die identische Transformation enthält.

Setzt man in den Gleichungen

$$a_k = a_k^{(0)} + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^r \lambda_j \alpha_{jk} (a^0) + \dots$$

$t\lambda_j = \tau_j$ an, so sind die endlichen Gleichungen der soeben erwähnten eingliedrigen Gruppe

$$x'_i = \bar{x}_i + \frac{1}{1!} \sum_k \tau_k X_k \bar{x}_i + \frac{1}{2!} \sum_{k,j} \tau_k \tau_j X_k X_j \bar{x}_i + \dots$$

Enthält dieses System die identische Transformation $\bar{x}_i = x_i$, so folgt

$$x'_i = x_i + \frac{1}{1!} \sum_k \tau_k X_k x_i + \frac{1}{2!} \sum_{k,j} \tau_k \tau_j X_k X_j x_i + \dots,$$

deren Parameter τ_k wesentlich sind. Man zeigt nun leicht, dass diese Schar von Transformationen eine Gruppe darstellt.

Genügt also eine Schar von Transformationen $x' = f_a(x)$ gewissen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{jk}(a) \xi_{ji}(x') \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r)$$

und enthält sie ausserdem die identische Transformation, so stellt sie eine Gruppe dar.

Der zweite Fundamentalsatz lautet:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$ eine r -gliedrige Gruppe bilden, ist die Existenz der $r(r-1)$ Relationen

$$(X_h X_k) f = \sum_{s=1}^r c_{hks} X_s f \quad (h, k = 1, 2, \dots, r),$$

worin die c_{hks} von x unabhängig sein sollen und die Strukturkonstanten genannt werden.

Der Beweis der zweiten Hälfte benutzt die Existenz der Lösungen eines Systems von r linearen partiellen Differentialgleichungen. Man kann ein solches System auf eine einzige lineare partielle Differentialgleichung und diese Gleichung auf ein simultanes System von Differentialgleichungen zurückführen, wovon die Existenz der Lösungen gezeigt worden ist.

Aus der ersten Hälfte des zweiten Fundamentalsatzes folgt der erste Teil des dritten Fundamentalsatzes: die r^3 Strukturkonstanten c_{hks} einer Gruppe sind verbunden mittels der Relationen

$$c_{hks} + c_{khs} = 0$$

$$\sum_{s=1}^r (c_{lhs} c_{skt} + c_{hks} c_{sit} + c_{kis} c_{sht}) = 0.$$

Es bleibt also die Umkehrung der zweiten Hälfte des dritten Fundamentalsatzes zu beweisen.

Wir folgen der ENGELSchen Methode ²⁾. F. SCHUR zeigt, im Falle, dass die Parameter dem Körper der komplexen Zahlen gehören, dass die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe einer r -gliedrigen Gruppe durch gewisse Potenzreihen darzustellen sind. Wir verwenden dieses Verfahren. Seien

$$X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen, welche den Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^r c_{iks} X_s f$$

genügen; man setze

$$\sum_{k=1}^r e^{(k)} X_k f = X f$$

worin die $e^{(k)}$ r willkürliche Konstanten darstellen; dann ist

$$x'_i = x_i + X x_i + \frac{1}{1.2} X X x_i + \dots = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(r)})$$

die kanonische Form der endlichen Gleichungen der von $X_1 f, \dots, X_r f$ erzeugten Gruppe. Also bestehen vermöge des ersten Fundamentalsatzes die Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial x'_i}{\partial e^{(k)}} = \sum_{j=1}^r \psi_{jk}(e^{(1)}, \dots, e^{(r)}) \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n),$$

$$\xi_{ji}(x') = \sum_{k=1}^r a_{jk}(e^{(1)}, \dots, e^{(r)}) \frac{\partial x'_i}{\partial e^{(k)}},$$

und es sind

$$A_k(f) = \sum_{j=1}^r a_{kj}(e) \frac{\partial f}{\partial e^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der ersten kanonischen Parametergruppe. Zur Bestimmung dieser infinitesimalen Transformationen musz man also zuerst die Funktionen ψ_{jk} bestimmen. SCHUR erhält für jedes ψ_{sk} eine unendliche Reihe. Wir fassen diese Ergebnisse zusammen mit Hilfe einer Matrix

$$\Psi = \mathring{E} + \frac{E}{2!} + \frac{E^2}{3!} + \dots + \frac{E^{n-1}}{n!} + \dots$$

²⁾ S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen III (Arbeiten Anderer).

worin $\overset{\circ}{E}$ die Einheitsmatrix,

$$E = \begin{vmatrix} E_1^1 & E_2^1 & \dots & E_r^1 \\ E_1^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & E_r^r \end{vmatrix}, \text{ worin } E_k^s = \sum_{\tau=1}^r c_{k\tau s} e^{(\tau)}.$$

Sind die Strukturkonstanten Elemente des Körpers der komplexen Zahlen, so konvergiert die Reihe

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \dots$$

für alle x und die Reihe stellt die Funktion $\frac{e^x - 1}{x}$ dar.

Es stellt sich nun heraus, dass denn auch die Reihe

$$\psi = \overset{\circ}{E} + \frac{A}{2!} + \frac{A^2}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

für alle Matrizen A konvergiert. Es ist ja für jede r -reihige Matrix A , wenn man die grösste Bewertung ihrer Elemente mit $|A|$ bezeichnet:

$$|A^n| \leq r^{n-1} |A|.$$

Daraus folgt, dass die Bewertungen der Glieder der Reihe (4) übertroffen werden von den Gliedern der Reihe

$$\frac{1}{r^2 |A|} \left[r^2 |A| + \frac{r^2 |A|^2}{2!} + \frac{r^3 |A|^3}{3!} + \dots + \frac{r^n |A|^n}{n!} + \dots \right]$$

und diese Reihe konvergiert im Körper der komplexen Zahlen für alle A ($A \neq$ die Nullmatrix). Hieraus ergibt sich, dass die unbeschränkte Konvergenz der Reihe (4) gültig bleibt für alle archimedisch bewerteten Körper (denn es sind alle archimedisch bewerteten Körper zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen isomorph³⁾).

In diesem Falle ist die weitere Behandlung dem SCHURschen Beweise ähnlich und die Umkehrung der zweiten Hälfte des dritten Fundamentalsatzes ist gültig.

Ist die Bewertung des Körpers K nicht-archimedisch, so tritt eine Beschränkung auf: die Potenzreihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

³⁾ A. OSTROWSKI, Acta Mathematica 41, 1918.

also auch

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots$$

konvergiert bei p -adischer Bewertung nur für alle

$$|x| < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Diese Reihen konvergieren also sicher für die Elemente x von K , für die

$$|x| = p^{-1} = |p|.$$

Es konvergiert dann die Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{E^v}{(v+1)!}$$

sicher für $|E| \leq p^{-\frac{1}{p-1}}$, wenn E die Matrix der Elemente E_s^k und $|E|$ die grösste Bewertung eines ihrer Elemente ist. In nicht-archimedisch bewerteten Körpern ist nämlich wegen der Relation $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$

$$|E^v| \leq |E|^v$$

also

$$\left| \frac{E^v}{(v+1)!} \right| \leq \frac{|E|^v}{|(v+1)!|}$$

und es konvergiert $\sum_v \frac{|E|^v}{|(v+1)!|}$, also a fortiori $\sum_v \frac{E^v}{(v+1)!}$ nur für $|E| \leq p^{-\frac{1}{p-1}}$

Es wird also den Matrizen E , also den E_k^s eine Beschränkung auferlegt. Es ist

$$E_k^s = \sum_{\tau=1}^r c_{k\tau s} e^{(\tau)}$$

worin die $e^{(\tau)}$ ($\tau = 1, 2, \dots, r$) r willkürliche Parameter sind. Die Forderung

$$|E| \leq p^{-\frac{1}{p-1}}$$

bedeutet also nichts anderes als eine einschränkende Bedingung für die $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(r)}$.

Vermöge der Relation

$$\sum \psi_{sk} a_{sj} = \varepsilon_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \dots, r)$$

erhalten wir für a_{kj} , ebenfalls unter den einschränkenden Bedingungen, konvergente Potenzreihen. Es sind

$$A_k f = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_{kj}} \frac{\partial f}{\partial e^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

(es ist $\psi = \frac{e^E - \overset{\circ}{E}}{E} \neq 0$ für $E \neq 0$) r infinitesimale Transformationen, deren jede dargestellt ist durch den Quotienten von Potenzreihen, also ebenfalls eine Potenzreihe mit Konvergenzbedingungen.

Genügen r^3 Elemente c_{iks} aus dem bewerteten Körper K der Relation

$$c_{iks} + c_{kis} = 0$$

$$\sum_{\tau=1}^r (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{j i \tau} c_{\tau ks}) = 0$$

so zeigt ENGEL auf eine Weise, welche wir ganz übernehmen können, dasz die Ausdrücke

$$A_k f = \sum_j \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{kj}} \frac{\partial f}{\partial e^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

tatsächlich die infinitesimalen Transformationen einer r -gliedrigen einfachen transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} darstellen. Damit ist die Umkehrung der zweiten Hälfte des dritten Fundamentalsatzes gezeigt worden.

Mathematics. — *Folgen und Reihen in bewerteten Körpern.* (Zweite Mitteilung.) By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

§ 9. *Substitution einer Reihe in eine zweite Reihe.*

Es sei

$$z = f(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n + \dots \quad (1)$$

eine Reihe mit Koeffizienten a_i aus einem vollständig bewerteten Körper K , welche für $|y| < R$ konvergiert, und

$$y = \varphi(x) = b + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots \quad (2)$$

eine zweite Reihe (b_i ebenfalls aus K), welche für $|x| < r$ konvergiert. Setzen wir nun für y, y^2, \dots die Ausdrücke in (1) ein, welche aus (2) folgen und ordnen wir die Reihe, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} & a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots + a_n b_0^n + \dots \\ & + a_1 b_1 x + 2 a_2 b_0 b_1 + \dots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \dots \\ & + a_1 b_2 x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Für die (absolute) Konvergenz ist zunächst notwendig, dass die Reihe

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots + a_n b_0^n + \dots$$

absolut konvergiert, also

$$|b_0| < R.$$

Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend: ist nämlich $|b_0| < R$, so kann man für $\varphi(x)$ eine Majorante

$$\frac{m}{1 - \frac{X}{\varrho}} \quad (m > |b_0|; \varrho < r)$$

bestimmen. Es sei $m < R' < R$. Die Funktion $z = f(y)$ hat eine Majorante der Form

$$\frac{M}{1 - \frac{Y}{R'}} = M + M \frac{Y}{R'} + M \frac{Y^2}{R'^2} + \dots$$

Ersetzt man nun Y durch den Ausdruck $\frac{m}{1 - \frac{X}{\varrho}}$, entwickelt und ordnet

man den gefundenen Ausdruck nach steigenden Potenzen in X , so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} M + M \left(\frac{m}{R'} \right) + \dots + M \left(\frac{m}{R'} \right)^n + \dots \\ + M \frac{m}{R'} \frac{X}{\varrho} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und es sind alle Koeffiziente positiv und ausserdem \geq die Bewertungen der entsprechenden Glieder von (3). Konvergiert also die Reihe (4) absolut, so wird a fortiori die Reihe (3) absolut konvergieren. Ersetzt man die reellen X durch ihre Absolutwerte, so ist für die Konvergenz der ganzen Reihe (4) notwendig, dass die vertikalen Reihen konvergieren, d.h. $X < \varrho$. Für $X < \varrho$ ist die Summe der $(n+1)$ -ten vertikalen Reihe

$$M \left(\frac{m}{R' \left(1 - \frac{X}{\varrho} \right)} \right)^n,$$

und es soll also

$$m < R' \left(1 - \frac{X}{\varrho} \right)$$

sein, d.h.

$$X < \varrho \left(1 - \frac{m}{R'} \right).$$

Diese Bedingung ist schärfer als $X < \varrho$ und sie ist für die absolute Konvergenz der Reihe (4) notwendig und hinreichend. Die Reihe (3) konvergiert auch absolut für

$$|x| < \varrho \left(1 - \frac{m}{R'} \right).$$

Für jene x konvergiert auch die Reihe (2), und es ist das entsprechende $|y| < R'$, denn aus die Ungleichungen

$$|\varphi(x)| < \frac{m}{1 - \frac{|x|}{\varrho}}, \quad \frac{|x|}{\varrho} < 1 - \frac{m}{R'}$$

schlieszt man $|\varphi(x)| < R'$.

Durch Zusammenfügung der vertikalen Reihen erhält man aus (3):

$$a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 [\varphi(x)]^2 + \dots + a_n [\varphi(x)]^n + \dots = f[\varphi(x)].$$

Durch Zusammenfügung der horizontalen Reihen erhält man aus (3):

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \quad (5)$$

worin

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots + a_n b_0^n + \dots \\ c_1 &= a_1 b_1 + 2 a_2 b_1 b_0 + \dots + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Relation (5) ist sicher gültig für alle $|x| < \varrho \left(1 - \frac{m}{R}\right)$.

Konvergiert $f(y)$ für alle y , so ändert sich die letzte Relation in $|x| < \varrho$, also, wegen $\varrho < r$, in $|x| < r$, und es ergibt sich, dass der Konvergenzradius derselbe ist wie von $\varphi(x)$.

Konvergiert ausserdem $\varphi(x)$ für alle x , so konvergiert die Reihe für $f[\varphi(x)]$ auch unbeschränkt.

Ist $b_0 = 0$, so wählen wir für $\varphi(x)$ die Majorante

$$\frac{m}{1 - \frac{X}{\varrho}} - m.$$

Man erhält dann, dass die Reihe (3) für

$$|x| < \varrho \cdot \frac{R'}{R' + m} \quad (R' < R)$$

konvergiert. Die Bedingung $|b_0| < R$ wird dann auch erfüllt.

Als Sonderfall des Erörterten gilt die Konvergenz der Reziproken einer Potenzreihe. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (a_0 \neq 0) \quad (6)$$

eine Potenzreihe mit Koeffizienten aus einem vollständig bewerteten Körper, welche für $|x| < r$ konvergiert. Wir versuchen zunächst

$$z = \frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots}$$

zu schreiben als eine Potenzreihe und untersuchen die Konvergenz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots} &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} x + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + \dots} = \\ &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - (a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots)} \quad \left(a'_n = -\frac{a_n}{a_0}, \text{ für } n \geq 1\right). \end{aligned}$$

Wir entwickeln also

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{a_0} [1 + (a'_1 x + \dots + a'_n x^n + \dots) + (a'_1 x + \dots + a'_n x^n + \dots)^2 + \dots] \quad (7) \\ &= \frac{1}{a_0} [1 + y + y^2 + \dots] \quad (8) \end{aligned}$$

für

$$y = a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots + a'_n x^n + \dots$$

Es ist also

$$z = g(y) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1-y} \quad \text{für } |y| < 1.$$

Es ist

$$Y = \frac{m}{1 - \frac{X}{r'}} - m \quad (r' < r)$$

eine Majorante für y , wenn man dafür sorgt, dass m eine obere Schranke der Glieder

$$|a'_n| r'^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. Weiter ist

$$Z = \frac{M}{1 - \frac{Y}{R'}} \quad (m < R' < 1)$$

eine Majorante für $z = g(y)$, wenn M eine obere Schranke ist von

$$\left| \frac{1}{a_0} \right| R'^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist.

Es ist nun klar, dass man das Obige anwenden kann; man findet also, dass die Reihe (7) konvergiert für

$$|x| < \frac{r}{1 + m} \quad (0 < m < 1),$$

und für jenes x stellt (7) die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ dar.

§ 10. Reihen in mehreren Veränderlichen.

Betrachten wir zuerst die Reihe

$$\sum_{m,n} A_{m,n} X^m Y^n, \quad (1)$$

worin $A_{m,n}$ reelle positive Zahlen darstellen und X und Y nur positiver reeller Werte fähig sind. Konvergiert (1) für (X_0, Y_0) , so konvergiert die Reihe auch für $X < X_0$ und $Y < Y_0$, aber divergiert sie für $X = X_0$ und $Y = Y_0$, so divergiert sie auch für $X > X_0$ und $Y > Y_0$ ¹⁾.

¹⁾ Die Reihe

$$\sum_{m,n} M \frac{X^m Y^n}{a^m b^n} \quad (M, a \text{ und } b \text{ reell})$$

konvergiert für $X < a$, $Y < b$ und stellt die Funktion

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{X}{a}\right) \left(1 - \frac{Y}{b}\right)}$$

dar. Die Reihe

$$\sum_{m,n} M \frac{(m+n)! X^m Y^n}{m! n! a^m b^n}$$

konvergiert für $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} < 1$ und stellt die Funktion $\frac{M}{1 - \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right)}$ dar.

Betrachten wir nun eine Reihe

$$F(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n \quad (2)$$

mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper K , in der man für x und y ausschliesslich Elemente von K einsetzt. Die Konvergenz dieser Reihe wird untersucht mit Hilfe der Reihe

$$\sum_{m,n} |a_{m,n}| X^m Y^n. \quad (3)$$

Konvergiert (3) für $X = X_0$, $Y = Y_0$, so gibt es ein M , so dass für alle m und n

$$|a_{m,n}| X_0^m Y_0^n < M,$$

und es ist das allgemeine Glied der Reihe $\sum_{m,n} |a_{m,n} x^m y^n|$,

$$|a_{m,n} x^m y^n| < M \frac{|x|^m |y|^n}{X_0^m Y_0^n},$$

also kleiner als das allgemeine Glied der Reihe $\sum_{m,n} M \frac{|x|^m |y|^n}{X_0^m Y_0^n}$, welche für $|x| < X_0$, $|y| < Y_0$ konvergiert. Aber dann konvergiert auch (2) für $|x| < X_0$, $|y| < Y_0$.

Divergiert aber $\sum_{m,n} |a_{m,n}| X^m Y^n$ für $X = X_0$, $Y = Y_0$, so divergiert auch (2) für $|x| > X_0$, $|y| > Y_0$. Denn konvergierte (2) für ein $|x_1| > X_0$, $|y_1| > Y_0$ so müsste sie absolut konvergieren für $|x| < |x_1|$, $|y| < |y_1|$ und es konvergierte auch (3) für $X < |x_1|$, $Y < |y_1|$. Das ist unmöglich, weil (3) für $X = X_0 < |x_1|$, $Y = Y_0 < |y_1|$ schon divergierte. Also divergiert (2) für $|x| > X_0$, $|y| > Y_0$.

Die Reihe (2) konvergiert gleichmässig für $|x| < a$, $|y| < b$, vorausgesetzt, dass die Reihe (3) für $X = a$, $Y = b$ konvergiert.

Also stellt $F(x, y)$ für $|x| < a$, $|y| < b$ eine stetige Funktion dar.

§ 11. Implizite und inverse Funktionen.

Es sei $F(x, y) = 0$ eine Gleichung in zwei Veränderlichen x und y , deren erstes Glied zu entwickeln ist in eine konvergente Reihe (mit Koeffizienten aus einem vollständigen bewerteten Körper K), geordnet nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$, während die linke Seite der Gleichung kein konstantes Glied hat und der Koeffizient von $y - y_0$ von Null verschieden ist. Diese Gleichung hat eine Lösung y , die für $x = x_0$ gleich y_0 wird, und diese Wurzel y lässt sich entwickeln in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir voraus: $x_0 = y_0 = 0$.

Die Gleichung lässt sich nun in die folgende Form bringen:

$$y = f(x, y) = a_{1,0} x + a_{2,0} x^2 + a_{1,1} xy + a_{0,2} y^2 + \dots \quad (1)$$

Wir setzen formal an

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \dots \quad (c_i \text{ aus } K), \quad (2)$$

so dass $f(x, y) = 0$ wird.

Mit dieser Reihe werden wir rechnen, als ob sie konvergent wäre.

Durch Vergleichung ergibt sich

$$c_1 = a_{1,0}; c_2 = a_{2,0} + a_{1,1} c_1 + \dots$$

Allgemein lässt sich c_n durch Addition und Multiplikation der a_{ik} ($i + k \leq n$) und der vorhergehenden Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_{n-1} darstellen. Wir bezeichnen

$$c_n = P_n(a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{0,n}),$$

wo die P_i Polynome sind. Wir haben die Konvergenz der Reihe (2) für gewisse x zu beweisen.

Dazu benutzen wir die Majorantenmethode. Es sei

$$\varphi(X, Y) = \sum_{m,n}^{\infty} b_{mn} X^m Y^n$$

eine Majorante von $f(x, y)$, aber dergestalt, dass $b_{0,0} = b_{0,1} = 0$, und die Gröszen b_{mn} , X und Y als reelle nicht-negative Gröszen zu betrachten sind.

Versuchen wir, die Hilfsgleichung

$$Y = \varphi(X, Y) = \sum_{m,n}^{\infty} b_{mn} X^m Y^n$$

zu lösen durch Substitution der Reihe

$$Y = C_1 X + C_2 X^2 + \dots, \quad (3)$$

so erhalten wir in derselben Weise wie für die c_i

$$C_1 = b_{1,0}, C_2 = b_{2,0} + b_{1,1} C_1 + b_{0,2} C_1^2, \dots, C_n = P_n(b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{0,n})$$

und vermöge der Tatsache, dass die Koeffizienten C_n ausschliesslich durch Addition und Multiplikation ermittelt werden, folgt:

$$|c_n| < C_n.$$

Die Reihe (2) wird also absolut konvergieren für $|x| < R$, wenn R der Konvergenzradius der Reihe (3) ist. Setzen wir nun an

$$\varphi(X, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{r}\right) \left(1 - \frac{Y}{\varrho}\right)} - M - M \frac{Y}{\varrho},$$

wo M , r und ϱ drei positive Gröszen sind. Dann lautet die Hilfsgleichung $Y = \varphi(X, Y)$ folgendermassen:

$$Y^2 - \frac{\varrho^2 Y}{\varrho + M} + \frac{M \varrho^2}{\varrho + M} \frac{X}{r - X} = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch in Y und sie besitzt eine Wurzel Y , welche für $X = 0$ verschwindet. Die Wurzel ist:

$$Y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} - \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} \cdot \sqrt{1 - \frac{4M(\varrho + M)}{\varrho^2} \frac{X}{r - X}}.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4M(\varrho + M)}{\varrho^2} \frac{X}{r - X} &= \left[\frac{(r - X)\varrho^2}{r\varrho^2} - \frac{4M(\varrho + M)X}{r\varrho^2} \right] \frac{r}{r - X} = \\ &= \frac{r\varrho^2 - X(\varrho + 2M)^2}{r\varrho^2} \left(1 - \frac{X}{r}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{X}{a}\right) \left(1 - \frac{X}{r}\right)^{-1} \text{ für } a = r \left(\frac{\varrho}{\varrho + 2M}\right)^2 \end{aligned}$$

und somit

$$Y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} \left[1 - \left(1 - \frac{X}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{X}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Diese Lösung Y kann also in eine konvergente Reihe entwickelt werden, welche für $\|X\| < a$ konvergiert. Aber dann konvergiert die Reihe (2) sicher für $|x| < a$.

Als Spezialfall des Obigen beweisen wir, dass im Körper K eine Reihe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (a_1 \neq 0) \quad (4)$$

mit a_i aus K , welche für $|x| < r$ konvergiert, eine inverse Reihe besitzt. Wenn wir in dieser Gleichung y als unabhängige Veränderliche und x als eine Funktion von y — vermöge der Gleichung (4) — betrachten, so besitzt diese Gleichung dem Obigen gemäss eine einzige Wurzel x , so dass $x = 0$, wenn $y = 0$, und x ist zu entwickeln in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von y :

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_n y^n + \dots \quad (5)$$

Die Koeffizienten b_i bestimmt man einfach durch Substitution der Reihe (5) in (4). Wir geben die Berechnung kurz wieder:

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ a_1 x &= y - (a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) \\ x &= \frac{1}{a_1} y - \left(\frac{a_2}{a_1} x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_1} x^n + \dots \right) \\ x &= a'_1 y + a'_2 x^2 + a'_3 x^3 + \dots + a'_n x^n + \dots, \\ \text{wo } a'_1 &= \frac{1}{a_1} \text{ und } a'_n = -\frac{a_n}{a_1}; (n = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Versuchen wir nun, für x zu schreiben

$$x = c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n + \dots$$

Mittels Substitution in (6) ergibt sich

$$c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n + \dots = a'_1 y + a'_2 (c_1 y + c_2 y^2 + \dots)^2 + \dots,$$

also

$$c_1 = a'_1; c_2 = a'_2 c_1^2; \dots; c_n = P_n(a'_1, a'_2, \dots, a'_n, c_1 \dots c_{n-1}),$$

worin die Berechnungen zur Bestimmung des c_n lediglich aus Additionen und Multiplikationen bestehen. Wir bestimmen für (6) eine Majorante

$$X = b_1 Y + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots,$$

versuchen, dafür zu schreiben

$$X = C_1 Y + C_2 Y^2 + \dots,$$

und zeigen für diese Reihe die Konvergenz. Eine Majorante der Reihe (6) ist

$$MY + \frac{M}{1 - \frac{X}{r'}} - M \frac{X}{r'} - M,$$

wo M , X , Y und r' nur reeller nicht-negativer Werte fähig sind. Nach Substitution erhalten wir

$$X = M \cdot Y + \frac{M}{1 - \frac{X}{r'}} - M \frac{X}{r'} - M,$$

also

$$\left(\frac{M}{r'^2} + \frac{1}{r'}\right) X^2 - \left(\frac{MY}{r'} + 1\right) X + MY = 0$$

$$X = \frac{1}{2\left(\frac{M}{r'^2} + \frac{1}{r'}\right)} \cdot \left\{ \left(\frac{MY}{r'} + 1\right) - \sqrt{\left(\frac{MY}{r'} + 1\right)^2 - 4MY\left(\frac{M}{r'^2} + \frac{1}{r'}\right)} \right\}$$

$$X = k \left\{ \left(\frac{MY}{r'} + 1\right) - \frac{M}{r'} \left(1 - \frac{Y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{Y}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Dieser Ausdruck für X lässt sich entwickeln in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von Y , die für bestimmte Y konvergiert. (Hier ziemlich komplizierte Ausdrücke.) Damit haben wir die Existenz und Konvergenz der ersten Reihe bewiesen.

§ 12. Die analytische Fortsetzung.

Während z.B. die Funktion

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots (|x| < 1) \quad (1)$$

im Körper der komplexen Zahlen analytisch fortgesetzt werden kann, beweisen wir, dass in einem nicht-archimedisch bewerteten Körper die

Fortsetzung dieser Funktion unmöglich ist. Es stellt sich heraus, dass der Konvergenzradius immer derselbe bleibt für eine andere Stelle des „Konvergenzkreises“; da p -adisch jede Stelle eines Kreises sein Mittelpunkt ist, beschränkt sich die Möglichkeit einer Reihenentwicklung auf den Kreis $|x| < 1$.

Wir setzen zum Beweise die p -adische Bewertung des Körpers R der rationalen Zahlen voraus. Für $p^\tau \cdot x$ ist also $|x| = p^{-\tau}$. Soll die Reihe (1) konvergieren, so soll mit aufsteigendem Exponenten n der Ausdruck x^n durch eine willkürlich hohe Potenz von p teilbar sein, also

$$n\sigma > C \text{ und folglich } \sigma > \frac{C}{n}.$$

Wegen $p^0 = 1$ bedeutet das: die Reihe (1) konvergiert höchstens für $|x| < 1$. Ebenso sieht man, dass die Reihe in der Tat für $|x| < 1$ konvergiert:

Für $|x| < 1$ stellt (1) die Funktion

$$\frac{1}{1-x}$$

dar; es ist ja

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

und es ist für festes x möglich, zu jedem vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ ein solches n_0 zu bestimmen, dass

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \varepsilon \quad (n > n_0).$$

Es sei nun $|x_0| < 1$. Wir versuchen jetzt, die ursprüngliche Reihe zu transformieren in

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Die Reihe soll folgende Gestalt haben:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} (f^{(n)}(x_0)) + \dots,$$

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{(1-x_0)^{n+1}},$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n! (1-x_0)^{n+1}} \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}$$

Diese Reihe konvergiert für $|x-x_0| < |1-x_0|$ und divergiert für $|x-x_0| \geq |1-x_0|$, und vermöge $|x_0| < 1$ konvergiert die Reihe also für $|x-x_0| < 1$ und divergiert für $|x-x_0| \geq 1$.

Im Körper R stellt die Menge der Elemente x , welche die Ungleichheit $|x-x_0| < 1$ befriedigen, dieselbe Menge dar wie die Elemente x , wofür $|x| < 1$.

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ ist also nicht in der auseinander gesetzten Weise analytisch fortzusetzen.

Versuchen wir nun, die Funktion

$$\frac{1}{1-x}$$

für $|x| > 1$ in eine konvergente Reihe zu entwickeln, so muß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n$$

untersucht werden.

Diese Reihe erhält die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}$$

und konvergiert für $|x-x_0| < |1-x_0|$ und divergiert für $|x-x_0| > |1-x_0|$.

Es ist $|x_0| > 1$ vorausgesetzt, und also, wegen der nicht-archimedischen Bewertung, konvergiert die Reihe für $|x-x_0| < |x_0|$ und divergiert für $|x-x_0| \geq |x_0|$.

In der komplexen Ebene erhalten wir Kreise, welche einander teilweise überdecken. In einem nicht-archimedisch bewerteten Körper gehören die x , für welche $|x| < 1$, der Menge $|x-x_0| < |x_0|$ nicht an, wenn $|x_0| > 1$.

Für alle Elemente x_0 des Konvergenzbereiches erhalten wir also durch Entwicklung in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x-x_0$ immer denselben Konvergenzbereich. Für die x_0 , welche diesem ersten Konvergenzbereich nicht angehören, erhalten wir eine Reihe, für welche der Konvergenzbereich den ersten Bereich ganz ausschließt, und dessen „Radius“ $|x_0|$ ist.

Wir beweisen im allgemeinen, daß die analytische Fortsetzung in nicht-archimedisch bewerteten Körpern unmöglich ist.

Es sei also

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

eine Reihe mit Koeffizienten aus einem nicht archimedisch bewerteten Körper K , welche für $|x| < R$ konvergiert und für $|x| > R$ divergiert. Wir nehmen $R' < R$ und $0 < |x_0| < R'$.

Versuchen wir die Funktion $f(x)$ zu entwickeln in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x-x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (3)$$

Wegen der Konvergenz der Reihe (2) für $|x| < R$ sind alle Glieder der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R'^n$$

absolut kleiner als eine bestimmte positive Zahl M , also

$$|a_n| R'^n < M \quad (\text{für alle } n)$$

und folglich

$$|a_n| < \frac{M}{R'^n}.$$

Hieraus lässt sich schliessen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{X^n}{R'^n} \quad (\text{für reelles } X)$$

eine Majorante der Reihe (2) ist. Für $X < R'$ schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{X^n}{R'^n} = \frac{M}{1 - \frac{X}{R'}}.$$

Wir beweisen, dass

$$\frac{M}{1 - \frac{|x_0|}{R'}} \left(1 + \frac{X}{R'} + \frac{X^2}{R'^2} + \dots + \frac{X^n}{R'^n} + \dots \right) \quad (3a)$$

eine Majorante der Reihe (3) ist.

Es ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \frac{(n+1)!}{1!} x + \dots,$$

also

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} x^k.$$

Kraft der Definition der Majorante brauchen wir nur zu zeigen, dass

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \right| \leq \frac{M}{R'^n \left(1 - \frac{|x_0|}{R'} \right)},$$

also

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} x_0^k \right| \leq \frac{M}{R'^n \left(1 - \frac{|x_0|}{R'} \right)}$$

oder

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} x_0^k \right| \leq \frac{M}{R'^n} \left(1 + \frac{|x_0|}{R'} + \frac{|x_0|^2}{R'^2} + \dots \right).$$

Es ist nun

$$t = \left[\frac{k-i}{m} \right] + 1 \equiv \left[\frac{k-m}{m} \right] + 1 = \left[\frac{k}{m} \right] = u$$

wegen $1 \leq i \leq m$.

Also enthält $(n+k)!$ mindestens soviele durch m teilbare Faktoren wie $n! \cdot k!$. Nimmt man $m \doteq p^c$ mit willkürlichem c , so erhält man

$$|(n+k)!| \leq |n!| \cdot |k!|, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Hiermit ist also dargetan, dass die Reihe (3a) eine Majorante der Reihe (3) ist. Das gilt für alle $R' < R$; also hat (3) mindestens denselben Konvergenzradius wie (2). Wir haben zum Schluss zu beweisen, dass die Reihe (3) nicht für $|x - x_0| > R$ konvergiert. Das überlegen wir folgendermassen:

Der Konvergenzkreis C_0 ($|x| < R$) der Reihe (2) hat die Eigenschaft, dass jedes Element sein „Mittelpunkt“ ist. Für ein Element x_1 , für das $|x_1| > R$ ist, ist „die Entfernung“ $|x_0 - x_1| = |x_1|$ (x_0 aus C_0) wegen $|x_1| > |x_0|$, also gleich gross für alle x_0 aus C_0 .

Entwickelt man die Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_1$ (worin $|x_1| > R$), so kann der Konvergenzkreis C_1 dieser Reihe niemals ein Element des Kreises C_0 enthalten, denn enthielte C_1 ein Element von C_0 , so müsste es alle Elemente von C_0 enthalten, denn alle Elemente von C_0 haben dieselbe Entfernung von x_1 . Wenn wir nun $f(x)$ entwickeln in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$, ($|x_0| < R$) so kann diese Reihe niemals konvergieren für ein x_1 mit $|x_1| > R$, denn die Reihenentwicklung von $f(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_1$ müsste dann auch für $x - x_0$ konvergieren. Das ist aber unmöglich, also konvergiert die Reihe (3) nur für $|x - x_0| < R$.

Zum Schluss ein Beispiel:

$$y = x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots$$

Diese Reihe stellt, wenn der Körper der rationalen Zahlen nicht-archimedisch bewertet ist, für $|x| < 1$, die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

dar.

Entwickeln wir nunmehr

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) &= \sum \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+2}} (x_0 + n) = \\ &= \frac{1-x_0}{1-x} \left\{ \frac{x_0}{(1-x_0)^2} + \frac{x-x_0}{(1-x_0)^3} + \frac{x-x_0}{(1-x_0)^4} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Reihe konvergiert für $|x-x_0| < |1-x_0|$, d.h., wenn $|x_0| < 1$ ist, für $|x-x_0| < 1$. Aber das ist für eine nicht-archimedische Bewertung dieselbe Menge wie $|x| < 1$.

Wenn $|x_0| > 1$, so konvergiert die Reihe (6) für $|x-x_0| < |x_0|$ und es gelten hier dieselben Bemerkungen wie im ersten Beispiel.

Mathematics. — *Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen.* (Fünfte Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

§ 14. Ich setze jetzt

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (62),} \\
 \beta &= \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (64),} \\
 \beta &= \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (64),} \\
 \beta &= \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (66),} \\
 \beta &= \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (66),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (68),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (68),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (69),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (69),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (70),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (71),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (71),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m \text{ in (72),} \\
 \beta &= -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m, \quad \kappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m \text{ in (72);}
 \end{aligned}$$

ferner setze ich wieder $\zeta = z^2$ und $v = u^2$ und in (64) und (66) noch $\psi = 2\varphi$.

Die gewonnenen Ergebnisse lauten mit Rücksicht auf (88), (93), (94), (95), (90), (91), (92) und (89)

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi} z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1-2k) \Gamma(1-k+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} \\
 &\quad \times \int_0^{\infty e^{-i \arg z}} u^{-k-m} e^{\frac{1}{2}u^2} W_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) J_{-k-m}^2(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2}-k \pm m) > 0), \\
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{4\sqrt{\pi} z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(\frac{1}{2}-k-m) \Gamma(1-k-m)} \\
 &\quad \times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{-k-m} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) I_{-k-m}(zu) K_{-k-m}(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2}-k \pm m) > 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(-k-m) \Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1-k+m)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} \\
 &\times \int_0^{\infty} e^{i\varphi} u^{-k-m} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) \{I_{k+m}^2(zu) - I_{-k-m}^2(zu)\} du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi, |\Re(k+m)| < 1 \text{ und } \Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0),
 \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{\sqrt{\pi} z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1-2k)}{2i \Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(1-k-m)} \\
 &\times \int_B u^{-k-m} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) H_{k+m}^{(1)}(zu) H_{k+m}^{(2)}(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{\sqrt{\pi} z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1-k+m)}{2i \Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(1+k+m)} \\
 &\times \int_B u^{-k-m} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) H_{k+m}^{(1)}(zu) H_{k+m}^{(2)}(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0),
 \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= -\frac{2\sqrt{\pi} z^{1-2k} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1+2k)}{\Gamma(1+k-m)} \\
 &\times \int_0^{\infty} e^{-i\arg z} u^{k-m} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) J_{k-m}(zu) Y_{k-m}(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{1}{4}\pi, \Re(\frac{1}{2}+k-m) > 0 \text{ und } \Re(1+k+m) > 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{z^{1-2k} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(k-m) \Gamma(1+k+m)}{\sqrt{\pi}} \\
 &\times \int_0^{\infty} e^{-i\arg z} u^{k-m} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) \{J_{m-k}^2(zu) - J_{k-m}^2(zu)\} du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{1}{4}\pi, |\Re(k-m)| < 1 \text{ und } \Re(1+k+m) > 0),
 \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned}
 W_{k,m}(z^2) &= \frac{2z^{1-2k} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1+2k)}{\pi^{\frac{1}{2}} i \Gamma(1+k-m)} \\
 &\times \int_C u^{k-m} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) K_{k-m}^2(zu) du \\
 &\quad (\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{1}{4}\pi \text{ und } \Re(1+k+m) > 0),
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{2 z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+k+m)}{\pi^{\frac{3}{2}} i \Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int_C u^{k-m} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) K_{k-m}^2(zu) du \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(1+k+m) > 0$),

$$\left. \begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2 \sqrt{\pi} z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} \\ &\times \int_0^\infty u^{k+m} e^{-\frac{1}{2} u^2} W_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) J_{k+m}^2(zu) du \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

(wo $z \neq 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2 \sqrt{\pi} z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+2m) \Gamma(1+2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1+k-m)} \\ &\times \int_0^\infty e^{-i \arg z} u^{k-m} e^{-\frac{1}{2} u^2} M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) J_{k-m}(zu) J_{m-k}(zu) du \end{aligned}$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(1+k-m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\left. \begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2 \sqrt{\pi} z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+2m) \Gamma(1+k+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int_0^\infty e^{-i \arg z} u^{k-m} e^{-\frac{1}{2} u^2} M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) J_{m-k}^2(zu) du \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(1-k+m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2 z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+2m) \Gamma(1+2k)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1+k-m)} \\ &\times \int_C u^{k-m} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2) I_{m-k}(zu) K_{m-k}(zu) du \end{aligned}$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\left. \begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2 z^{1-2k} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(1+2m) \Gamma(1+k+m)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int_C u^{k-m} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2) I_{m-k}(zu) K_{m-k}(zu) du \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$).

Die Formeln (161), (162), (163), (164), (165) und (167) sind Verallgemeinerungen bezw. von (141), (148), (146), (149), (147) und (153). Mit Rücksicht auf (113), (112), (114), (115) und (116) sieht man nämlich leicht ein, dass die Relationen (161), (162), (163), (164), (165) und (167) für $k=0$ nach einiger Reduktion in (141), (148), (146), (149), (147) und (153) übergehen; Formel (147) kann auch aus (166) mit $k=0$ abgeleitet werden.

§ 15. Nimmt man $\beta=\frac{1}{2}$, $\kappa=k$ und $\lambda=m$ in (69) und ersetzt man ζ durch z^2 und v durch u^2 , so erhält man mit Rücksicht auf (106)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-2k-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(1+2m)} \int_C u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}(z-u)^2} M_{k,m}(u^2) W_{2k+\frac{1}{2},2m}(2zu) du;$$

diese Beziehung gilt für $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(k) < \frac{1}{4}$.

Die Substitutionen: $\beta=\frac{1}{2}$, $\kappa=k-1$, $\lambda=m$; $\beta=-\frac{1}{2}$, $\kappa=k-1$, $\lambda=m$; $\beta=-\frac{1}{2}$, $\kappa=k-2$, $\lambda=m$; $\beta=0$, $\kappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\kappa=k-\frac{3}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\kappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m-\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\kappa=k-\frac{3}{2}$, $\lambda=m-\frac{1}{2}$ in (69) liefern analoge Formeln. Relation (69) mit $\beta=0$, $\kappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$, $\zeta=z^2$ und $v=u^2$ ergibt z. B.

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-2k} \Gamma(\frac{3}{2}-k+m)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(2+2m)} \int_C u^{-1} e^{\frac{1}{2}(z-u)^2} M_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(u^2) W_{2k,2m+\frac{1}{2}}(2zu) du;$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(k) < \frac{1}{2}$.

§ 16. Wegen (75) und (105) hat man

$$\begin{aligned} & G_{2,4}^{2,2} \left(\frac{1}{4} w^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n, \frac{3}{4} + \frac{1}{2} n \\ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} v, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} v \end{matrix} \right. \right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n} w^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v} G_{2,4}^{2,2} \left(\frac{1}{4} w^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} v + \frac{1}{4} n, \frac{3}{4} + \frac{1}{4} v + \frac{1}{4} n \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} v - \frac{1}{4} n, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} v - \frac{1}{4} n, \frac{3}{4} - \frac{1}{4} v + \frac{1}{4} n, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} v + \frac{1}{4} n \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{2^{v+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(-n)}{\Gamma(v-n)} w^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}w} M_{-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}(w). \end{aligned}$$

Aus (63) mit $\zeta=\frac{1}{2}z^2$, $v=\frac{1}{2}u^2$, $k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n$, $m=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v$, $\kappa=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}v$ und $\lambda=\frac{1}{4}$ folgt also mit Rücksicht auf (111)

$$D_n(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v}}{\Gamma(v-n)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}(z+u)^2} D_v(u) M_{-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}v-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}(zu) du; \quad (168)$$

hierin ist $z \neq 0$ und v beliebig mit $\Re(v-n) > 0$.

Auf analoge Weise findet man, wenn man $\zeta = \frac{1}{2} z^2$, $v = \frac{1}{2} u^2$, $k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n$, $m = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \nu$, $\kappa = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \nu$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ substituiert in (63)

$$D_n(z) = -\frac{z^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\nu + 1}}{(n+1)\Gamma(\nu - n - 2)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n - 2} e^{-\frac{1}{2}(z+u)^2} D_\nu(u) M_{-\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}}(zu) du; \quad (167)$$

in dieser Relation ist $z \neq 0$ und ν beliebig mit $\Re(\nu - n - 2) > 0$.

Für $\nu = -n$ geht (168) wegen (112) in (138) über; setzt man $\nu = -n$ in (169), so erhält man (139).

Nun folgt aus (111) und (116)

$$D_0(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}, \quad D_1(u) = u e^{-\frac{1}{2}u^2}, \quad \dots \quad (170)$$

Hieraus geht hervor mit Rücksicht auf (114), dass Formel (120) ein Spezialfall sowohl von (168) wie von (169) ist; man findet nämlich (120), wenn man $\nu = 0$ in (168) oder $\nu = 1$ in (169) setzt. Nimmt man $\nu = 1$ in (168), so bekommt man

$$D_n(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\Gamma(1-n)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}zu} M_{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n}(zu) du; \quad (171)$$

diese Beziehung gilt für $z \neq 0$ und $\Re(n) < 2$.

§ 17. Setzt man $\zeta = 2z^2$, $v = 2u^2$, $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$ und $\kappa = \frac{3}{4} + k$ in (70), so findet man infolge (111) und (107), falls $z \neq 0$ und $\Re(\frac{1}{2} + m) > 0$ ist,

$$M_{k,m}(2z^2) = \frac{2^{-k-\frac{1}{2}} e^{z^2} \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + 2m)} \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} D_{2k+1}(2u) M_{k,m}(4izu) M_{k,m}(-4izu) du. \quad (172)$$

Diese Beziehung ist eine Erweiterung von (147). Es gilt nämlich ⁴⁴⁾

$$M_{0,m}(2iw) M_{0,m}(-2iw) = 2^{1+4m} w \Gamma^2(1+m) J_m^2(w);$$

berücksichtigt man nun noch (112) und (170), so sieht man leicht ein, dass (172) für $k=0$ in (147) übergeht.

Nimmt man $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$, $\kappa = k - \frac{3}{4}$, $\zeta = z^2$, $v = u^2$ und $\psi = 2\varphi$ in (66), so bekommt man wegen (109)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} - k)}{\pi i} \int_B u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{k-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(u^2) W_{k,m}(2izu) W_{k,m}(-2izu) du; \quad (173)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2} - k) > 0$.

⁴⁴⁾ [15], 633, Formel (53).

Der Ansatz $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$, $\kappa = -k - \frac{3}{4}$, $\zeta = z^2$ und $v = u^2$ in (69) und in (72) liefert infolge (110) und (108)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k)}{\pi i} \int_C u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u^2) W_{k,m}(2zu) W_{-k,m}(2zu) du \quad (174)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{3}{2} + k) > 0$)

und

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{2e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k)}{\pi i} \int_C u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-k-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(u^2) M_{k,m}(2zu) W_{-k,m}(2zu) du \quad (175)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2} + k) > 0$).

Man findet analoge Relationen, wenn man in (66), (69) und (72) $\beta = -\lambda = \frac{1}{4}$ (statt $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$) substituiert.

Nun ist ⁴⁵⁾

$$W_{0,m}(2iw) W_{0,m}(-2iw) = \frac{1}{2} \pi w H_m^{(1)}(w) H_m^{(2)}(w).$$

Nimmt man $k=0$ in (173) und ersetzt man z durch $z\sqrt{2}$ und u durch $u\sqrt{2}$, so erhält man also wegen (113) und (115)

$$K_m(z^2) = \frac{\pi e^{-z^2}}{i} \int_E u e^{2u^2} H_m^{(1)}(2zu) H_m^{(2)}(2zu) du;$$

diese Beziehung habe ich in § 11 auf andere Weise abgeleitet (siehe (148)).

Die mit (148) verwandten Formeln (149) und (153) sind Spezialfälle bzw. von (174) und (175); man sieht nämlich leicht ein mit Rücksicht auf (113), (112) und (115), dass die Relationen (174) und (175) mit $k=0$ in (149) bzw. (153) übergeführt werden können.

§ 18. Wegen (75) und (108) hat man

$$G_{2,4}^{3,1} \left(\frac{1}{4} w^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}n - \frac{1}{4} \\ \lambda - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\lambda - \frac{1}{4} \end{matrix} \right. \right) = \frac{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2}n)}{w^{\frac{1}{2}} \Gamma(1 + 2\lambda)} M_{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \lambda}(w) W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \lambda}(w).$$

Aus (64) mit $k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$, $m = \frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $\kappa = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$, $\zeta = \frac{1}{2}z^2$, $v = \frac{1}{2}u^2$ und $\psi = 2\varphi$ ergibt sich also mit Rücksicht auf (111)

$$\left. \begin{aligned} D_n(z) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2}n) \Gamma(1 + \lambda - \frac{1}{2}n)}{2^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} z \Gamma(-n) \Gamma^2(1 + 2\lambda)} \\ &\times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{-1} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \lambda}(\frac{1}{2}u^2) M_{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \lambda}(zu) W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \lambda}(zu) du; \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(n) < 0$ und λ beliebig mit $\Re(\frac{1}{2} + \lambda) > 0$.

⁴⁵⁾ [15], 633, Formel (54).

Analoge Beziehungen kommen zum Vorschein, wenn man

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n, m = \frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{4}, \kappa = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \zeta = \frac{1}{2}z^2, v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \psi = 2\varphi \text{ in (66)}$$

oder

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n, m = \frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{4}, \kappa = -\frac{1}{2}n - 1, \zeta = \frac{1}{2}z^2 \text{ und } v = \frac{1}{2}u^2 \text{ in (69)}$$

setzt.

Diese Substitutionen ergeben infolge (111), (109) und (110)

$$D_n(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2}n) \Gamma(-\lambda - \frac{1}{2}n) \Gamma(1 + \lambda - \frac{1}{2}n)}{2^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} \pi i z \Gamma(-n) \Gamma(1 + 2\lambda)}$$

$$\times \int_B u^{-1} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \lambda}(\frac{1}{2}u^2) W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \lambda}(izu) W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \lambda}(-izu) du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(n) < 0$ und λ beliebig)

und

$$D_n(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + \lambda + \frac{1}{2}n)}{\sqrt{\pi} i z \Gamma(1 + 2\lambda)} \int_C u^{-1} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-\frac{1}{2}n - 1, \lambda}(\frac{1}{2}u^2) W_{\frac{1}{2}n, \lambda}(zu) W_{-\frac{1}{2}n, \lambda}(zu) du \quad (1)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(n + 3) > 0$ und λ beliebig).

Für $\lambda = -\frac{1}{2}n$ geht (176) wegen (114) und (116) in

$$D_n(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\Gamma(1 - n)} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}zu} M_{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n}(zu) du$$

über, und diese Relation kann leicht auf (171) zurückgeführt werden.

Der Spezialfall mit $\lambda = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ von (177) liefert infolge (115) und (116) die für jedes $z \neq 0$ geltende Beziehung

$$D_n(z) = \frac{2^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}n - 1} e^{\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{\pi} i} \int_E u^{\frac{1}{2}n + 1} e^{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}zu} W_{\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}}(zu) du.$$

§ 19. Wegen (75) und (108) hat man

$$\begin{aligned} & G_{2,4}^{3,1} \left(w^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k - 2m \\ \frac{1}{2} - m, m, -m, -3m \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi} w^{-2m-1} \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(1 + 4m)} M_{-k-m, 2m}(2w) W_{k+m, 2m}(2w). \end{aligned}$$

Aus (64) mit $\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\kappa = \frac{3}{4} - k$, $\lambda = \frac{1}{4} + m$, $\zeta = z^2$, $v = u^2$ und $\psi = 2\varphi$ folgt also

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi} z^{-2m} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k - m) \Gamma(\frac{3}{2} + 2m) \Gamma(1 + 4m)} \\ &\times \int_0^{\infty} e^{i\varphi} u^{2m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}+m}(u^2) M_{-k-m, 2m}(2zu) W_{k+m, 2m}(2zu) du; \end{aligned} \right\} (178)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(\frac{1}{4} + m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2} - k - m) > 0$.

Die Substitutionen

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = \frac{3}{4} - k \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (64), . . . (179)}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - 2m, \kappa = k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (66), . . . (180)}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - 2m, \kappa = k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} - m \text{ in (66),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (66),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} - m \text{ in (66),}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (69), . . . (181)}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} - m \text{ in (69),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (69),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} - m \text{ in (69),}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - 2m, \kappa = k + \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (70), . . . (182)}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} - 2m, \kappa = k + \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} + m \text{ in (70),}$$

$$\beta = \frac{1}{4} + 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} - m \text{ in (72), . . . (183)}$$

$$\beta = \frac{1}{4} + 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} + m \text{ in (72),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} + 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4} - m \text{ in (72),}$$

$$\beta = -\frac{3}{4} + 2m, \kappa = -k - \frac{3}{4} \text{ und } \lambda = -\frac{1}{4} + m \text{ in (72)}$$

liefern mit (178) verwandte Formeln; die Substitutionen (179), (180), (181), (182) und (183) ergeben z. B. ⁴⁶⁾ mit Rücksicht auf (108), (109), (110) und (107)

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi} z^{-2m-1} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k - m) \Gamma(\frac{3}{2} + 2m) \Gamma(2 + 4m)} \\ &\times \int_0^{\infty} e^{i\varphi} u^{2m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}+m}(u^2) M_{-k-m-\frac{1}{2}, 2m+\frac{1}{2}}(2zu) W_{k+m+\frac{1}{2}, 2m+\frac{1}{2}}(2zu) du \end{aligned} \right\}$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(\frac{1}{2} + m) > 0$ und $\Re(k + m) < 0$).

⁴⁶⁾ Ich setze immer $\zeta = z^2$ und $v = u^2$ und in (64) und (66) überdies noch $\psi = 2\varphi$.

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{z^{-2m} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - 3m)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(\frac{1}{2} - k - m) \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_B u^{2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{k-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+m}(u^2) W_{k+m, 2m}(2izu) W_{k+m, 2m}(-2izu) du$$

$$(\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2} - k - m) > 0),$$

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{z^{-2m} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k + m)}{\sqrt{\pi} i \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_C u^{2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-k-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+m}(u^2) W_{k-m, 2m}(2zu) W_{m-k, 2m}(2zu) du$$

$$(\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{1}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{3}{2} + k - m) > 0),$$

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-4m} z^{-2m} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{1}{2} - k + 3m)}{\Gamma(1 + 4m) \Gamma(\frac{1}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_0^\infty u^{2m-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} W_{k+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+m}(u^2) M_{k-m, 2m}(2izu) M_{k-m, 2m}(-2izu) du$$

$$(\text{wo } z \neq 0 \text{ und } \Re(\frac{1}{4} + m) > 0),$$

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-4m} z^{2m} e^{\frac{1}{2}z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k - m) \Gamma(\frac{1}{2} + k + 3m)}{i \Gamma(\frac{1}{2} + k + m) \Gamma(\frac{1}{2} + 2m) \Gamma(\frac{3}{2} - 2m)}$$

$$\times \int_C u^{-2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}u^2} M_{-k-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}-m}(u^2) M_{k+m, 2m}(2zu) W_{-k-m, 2m}(2zu) du$$

$$(\text{wo } z \neq 0, |\arg z| < \frac{1}{4}\pi \text{ und } \Re(\frac{1}{2} + k + m) > 0).$$

Mathematics. — *Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen und ihre Produkte.* (Zweite Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

§ 4. Nimmt man $\mu = \frac{1}{2} - \lambda$ in (29) und ersetzt man überdies noch v durch $\cosh^2 t$, so findet man infolge (20)

$$W_{k,m}(z) = 2z^\lambda \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z \sinh^2 t} W_{k+\lambda, \frac{1}{2}-\lambda}(z \cosh^2 t) P_{m-\frac{1}{2}}^{1-2\lambda}(\cosh 2t) \sinh^{2\lambda} t dt. \quad (34)$$

Nun ist ¹⁵⁾

$$D_n(\zeta) = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n} \zeta^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n, \pm \frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\zeta^2), \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

worin $D_n(\zeta)$ die parabolische Zylinderfunktion bezeichnet. Der Spezialfall von (34) mit $\lambda = \frac{1}{4}$ liefert also mit Rücksicht auf (26)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{1-k} z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z \sinh^2 t} D_{2k}(2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} \cosh t) \cosh 2mt dt. \quad . \quad (36)$$

Diese Integraldarstellung der WHITTAKERSchen Funktion ist eine Erweiterung der bekannten Beziehung ¹⁶⁾

$$K_m(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh u} \cosh mu du; \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

man sieht nämlich leicht ein, wegen ¹⁷⁾

$$K_m(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} W_{0,m}(2z). \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und ¹⁸⁾

$$D_0(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

dass (36) mit $k=0$ äquivalent ist mit (37).

Ich werde noch zwei Spezialfälle von (34) näher betrachten. Ich sub-

¹⁵⁾ WHITTAKER and WATSON, [23], § 16.5.

¹⁶⁾ WATSON, [22], 181, Formel (5).

¹⁷⁾ MEIJER, [12], Formel (8).

¹⁸⁾ (39) folgt aus (35) und (30).

stituiere erst $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$ in (34); das Ergebnis wird infolge (30) die für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(k) < 1$ gültige Relation

$$W_{k,m}(z) = 2z \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z \cosh 2t} P_{m-\frac{1}{2}}^k(\cosh 2t) \sinh^{1-k} t \cosh^{1+k} t dt. \quad (40)$$

Ferner setze ich noch $k=0$ in (34); das Ergebnis wird wegen (38) und (30)

$$K_m(z) = 2^{-\frac{1}{2}} z^{2\lambda-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh u} P_{m-\frac{1}{2}}^{1-2\lambda}(\cosh u) \sinh^{2\lambda} u du. \quad (41)$$

Nimmt man hierin $\lambda = \frac{1}{4}$, so bekommt man (37).

Die Formeln (40) und (41) waren bekannt¹⁹⁾.

Substituiert man $\mu = -\frac{1}{4}$ und $v = \cosh^2 t$ in (29), so erhält man mit Rücksicht auf (35) und (22)

$$W_{k,m}(z) = 2^{\lambda-k+\frac{1}{2}} z^{\lambda+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z \sinh^2 t} D_{2k+2\lambda-\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \cosh t) P_{2m-\frac{1}{2}}^{1-2\lambda}(\cosh t) \sinh^{2\lambda} t dt. \quad (42)$$

Diese Beziehung ist eine Erweiterung von (36); denn für $\lambda = \frac{1}{4}$ geht (42) infolge (26) in (36) über.

Den beiden Spezialfällen von (42) mit $\lambda = \frac{1}{4} - k$ und $\lambda = \frac{3}{4} - k$ bin ich auch in einer anderen Arbeit²⁰⁾ begegnet.

Zum Schluss setze ich noch $\lambda = m + \frac{1}{2}$ und $v = \sec^2 \varphi$ in (29). Das Resultat dieser Substitution ist wegen (24)

$$W_{k,m}(z) = 2z^{m+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}z \operatorname{tg}^2 \varphi} W_{k+m+\frac{1}{2},\mu}(z \sec^2 \varphi) P_{\mu-\frac{1}{2}}^{-2m}(\cos 2\varphi) \operatorname{tg}^{2m+1} \varphi d\varphi; \quad (43)$$

in dieser Beziehung wird $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(m) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt.

Für $\mu = k + m$ geht (43) infolge (30) in

$$W_{k,m}(z) = 2z^{k+2m+1} e^{-\frac{1}{2}z} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-z \operatorname{tg}^2 \varphi} P_{k+m-\frac{1}{2}}^{-2m}(\cos 2\varphi) \sin^{2m+1} \varphi \cos^{-2k-4m-2} \varphi d\varphi \quad (44)$$

über. Nimmt man hierin $m = -\frac{1}{4}$, so bekommt man eine sehr einfache Integraldarstellung für die Funktion $D_n(z)$; aus (44) mit $m = -\frac{1}{4}$, (35) und (27) folgt nämlich

$$D_n(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{n+1} e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cos^{-n-2} \varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

¹⁹⁾ MEIJER, [11], 480; [17], 1100, 1102 und 146; [20], 210. Siehe auch MACDONALD, [6], 437, Formel (16); MACROBERT, [7], 701, Formel (12a) und [8], 91, Formel (25). Formel (41) enthält bei MACDONALD einen Rechenfehler.

²⁰⁾ [17], 1100, 1102 und 146. Siehe auch [14].

§ 5. Die Anwendung von (1) mit $\alpha = \frac{1}{2} + \lambda + \mu$ und $\beta = \frac{1}{2} + \lambda - \mu$ auf (8) liefert wegen (15) und (8) (man vergl. auch den Beweis von (29))

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^\lambda e^{-\frac{1}{2}z} \Gamma(\frac{1}{2} - k + \lambda + \mu) \Gamma(\frac{1}{2} - k + \lambda - \mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m) \Gamma(2\lambda)} \int_1^\infty e^{\frac{1}{2}zv} W_{k-\lambda, \mu}(zv) \left. \begin{aligned} & \times {}_2F_1(\lambda + \mu - m, \lambda + \mu + m; 2\lambda; 1-v) (v-1)^{2\lambda-1} v^{\mu-\frac{1}{2}} dv; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $\Re(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$ und $\Re(\lambda) > 0$.

Für $\mu = m + \lambda$ geht (45) zufolge (32) in

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^\lambda e^{-\frac{1}{2}z} \Gamma(\frac{1}{2} - k + m + 2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(2\lambda)} \int_1^\infty e^{\frac{1}{2}zv} W_{k-\lambda, m+\lambda}(zv) (v-1)^{2\lambda-1} v^{-m-\lambda-\frac{1}{2}} dv \quad (46)$$

über; diese Beziehung gilt für $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $\Re(\frac{1}{2} - k + m) > 0$ und $\Re(\lambda) > 0$.

Der Spezialfall von (45) mit $\mu = \frac{1}{2} - \lambda$ und $v = \cosh^2 t$ ergibt wegen (20)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2z^\lambda \Gamma(1-k) \Gamma(2\lambda-k)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} \left. \begin{aligned} & \times \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}z \sinh^2 t} W_{k-\lambda, \frac{1}{2}-\lambda}(z \cosh^2 t) P_{m-\frac{1}{2}}^{1-2\lambda}(\cosh 2t) \sinh^{2\lambda} t dt. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Setzt man hierin $\lambda = \frac{1}{4}$, so findet man mit Rücksicht auf (35) und (26)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{k+\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{4}} \Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}z \sinh^2 t} D_{2k-1}(2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \cosh t) \cosh 2mt dt. \quad (48)$$

Ferner substituiere ich noch $\mu = -\frac{1}{4}$ und $v = \cosh^2 t$ in (45); das Ergebnis wird infolge (35) und (22)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{\lambda+k+\frac{3}{4}} \sqrt{\pi} z^{\lambda+\frac{1}{4}} \Gamma(\frac{1}{2} - 2k + 2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} \left. \begin{aligned} & \times \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}z \sinh^2 t} D_{2k-2\lambda-\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \cosh t) P_{2m-\frac{1}{2}}^{1-2\lambda}(\cosh t) \sinh^{2\lambda} t dt. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Nimmt man hierin $\lambda = \frac{1}{4}$, so bekommt man (48).

Zum Schluss setze ich $\lambda = m + \frac{1}{2}$ und $v = \sec^2 \varphi$ in (45); ich erhalte dann wegen (24), falls $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $\Re(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$ und $\Re(m) > -\frac{1}{2}$ ist,

$$W_{k,m}(z) = \frac{2z^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(1-k+m+\mu) \Gamma(1-k+m-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} \left. \begin{aligned} & \times \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{\frac{1}{2}z \operatorname{tg}^2 \varphi} W_{k-m-\frac{1}{2}, \mu}(z \sec^2 \varphi) P_{\mu-\frac{1}{2}}^{-2m}(\cos 2\varphi) \operatorname{tg}^{2m+1} \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Die Relationen (45), (46), (47), (48), (49) und (50) entsprechen bzw. (29), (33), (34), (36), (42) und (43).

§ 6. Ich gebe jetzt eine Anwendung von (6).

Mit Hilfe von (6) (mit $\alpha = \frac{1}{2} + 2\lambda + m$) und (9) findet man für die Funktion $M_{k,m}(z)$

$$M_{k,m}(z) = \frac{e^{\frac{1}{2}z} \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(2\lambda)} \int_1^\infty G_{1,2}^{1,1} \left(zv \left| \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2}+m+2\lambda, \frac{1}{2}-m \end{matrix} \right. \right) (v-1)^{2\lambda-1} v^{-m-2\lambda-\frac{1}{2}} dv.$$

Nun folgt aus (15) und (9)

$$\begin{aligned} G_{1,2}^{1,1} \left(zv \left| \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2}+m+2\lambda, \frac{1}{2}-m \end{matrix} \right. \right) &= (zv)^\lambda G_{1,2}^{1,1} \left(zv \left| \begin{matrix} 1-k-\lambda \\ \frac{1}{2}+m+\lambda, \frac{1}{2}-m-\lambda \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{(zv)^\lambda e^{-\frac{1}{2}zv} \Gamma(\frac{1}{2}+k+m+2\lambda)}{\Gamma(1+2m+2\lambda)} M_{k+\lambda, m+\lambda}(zv). \end{aligned}$$

Die Funktion $M_{k,m}(z)$ besitzt daher die mit (33) und (46) verwandte Integraldarstellung ²¹⁾

$$\left. \begin{aligned} M_{k,m}(z) &= \frac{z^\lambda e^{\frac{1}{2}z} \Gamma(1+2m) \Gamma(\frac{1}{2}+k+m+2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m) \Gamma(1+2m+2\lambda) \Gamma(2\lambda)} \\ &\quad \times \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}zv} M_{k+\lambda, m+\lambda}(zv) (v-1)^{2\lambda-1} v^{-m-\lambda-\frac{1}{2}} dv; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$ und $\Re(\lambda) > 0$.

Eine Verallgemeinerung von (51) kommt in etwas anderer Gestalt vor in einer vorigen Arbeit ²²⁾ des Verfassers.

§ 7. Wendet man (1) mit $\zeta = \frac{1}{4}z^2$ und $v = u^2$ auf (10) an, so findet man, falls $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\alpha + \beta) > 0$ ist,

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{2^{k+\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 u^2 \left| \begin{matrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right. \right) \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(\alpha - \frac{1}{2}m, \alpha + \frac{1}{2}m; \alpha + \beta; 1-u^2 \right) (u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta} du. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

²¹⁾ Eine mit (36) und (48) verwandte Integraldarstellung für $M_{k,m}(z)$ ist von ERDÉLYI ([2], 272, Formel (8, 15)) gegeben worden.

²²⁾ Man vergl. [16], Formel (8) mit $\alpha = \beta$ und $\gamma = 1$.

Nun hat man wegen (16), (15) und (13)

$$G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \end{array} \right. \right) = G_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \end{array} \right. \right) \\ = \frac{1}{2} \zeta G_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m \end{array} \right. \right) = \zeta K_m(\zeta).$$

Aus (52) mit $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k$, $\beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k$ und $u = \cosh t$ ergibt sich also mit Rücksicht auf (22)

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} K_m(z \cosh t) P_{m-\frac{1}{2}}^k(\cosh t) \sinh^{1-k} t \cosh^{\frac{1}{2}+k} t dt; \quad (53)$$

diese Beziehung gilt für $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} \pi$ und $\Re(k) < 1$.

Ganz analog beweist man die Relationen ²³⁾

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} K_m(z \cosh t) P_{m-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh^{-k} t \cosh^{k-\frac{1}{2}} t dt \quad (54)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} \pi$ und $\Re(k) < 0$)

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} K_{m+\frac{1}{2}}(z \cosh t) P_{m-1}^{k+\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh^{\frac{1}{2}-k} t \cosh^k t dt \quad (55)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} \pi$ und $\Re(k) < \frac{1}{2}$).

Die Formeln (53), (54) und (55) habe ich früher ²⁴⁾ auf andere Weise gefunden.

§ 8. Die Anwendung von (1) mit $\zeta = \frac{1}{4} z^2$ und $v = u^2$ auf (11) liefert

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi} \Gamma(a + \beta - \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 u^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k \\ a, \beta, m, -m \end{array} \right. \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \times {}_2F_1(a, a - \frac{1}{2}; a + \beta - \frac{1}{2}; 1 - u^2) (u^2 - 1)^{a+\beta-\frac{3}{2}} u^{1-2\beta} du \end{array} \right\} \quad (56)$$

²³⁾ Wegen der Symmetrieeigenschaften der G -Funktion (siehe [21], 83) gilt

$$G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \end{array} \right. \right) = G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m \end{array} \right. \right) \\ = G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k \\ \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m \end{array} \right. \right).$$

²⁴⁾ [11], 481—482.

Nun folgt aus (16) und (13)

$$G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k \\ \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} + k, m, -m \end{array} \right. \right) = 2 K_{2m}(\zeta).$$

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2} - k$, $\beta = \frac{1}{2} + k$ und $u = \sec \varphi$ in (56), so erhält man also mit Rücksicht auf (25)

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{2m}(z \sec \varphi) \cos 2k\varphi \sec \varphi d\varphi; \quad (57)$$

diese Beziehung, gültig für jedes $z \neq 0$ mit $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, habe ich in einer vorigen Arbeit²⁵⁾ auf andere Weise abgeleitet.

Für das Produkt $W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz)$ gilt wegen (1) (mit $\zeta = \frac{1}{4} z^2$, $v = \sec^2 \varphi$, $\alpha = \frac{1}{2} - k$ und $\beta = \frac{1}{2} + k$ angewendet), (12) und (16)

$$W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz) = \frac{z}{\pi \Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} \\ \times \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G_{1,3}^{3,1} \left(\frac{1}{4} z^2 \sec^2 \varphi \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k \\ \frac{1}{2} + k, m, -m \end{array} \right. \right) \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - k, -k; \frac{1}{2}; -\tan^2 \varphi \right) \cos^{2k-1} \varphi d\varphi;$$

mit Rücksicht auf (14) und (25) besteht daher die mit (57) verwandte Relation

$$W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz) = \frac{2^{1-2k} z}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} S_{2k,2m}(z \sec \varphi) \cos 2k\varphi \sec \varphi d\varphi; \quad (58)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$ und $\Re(k) < \frac{1}{2}$.

Aus (1) und (11) folgt nicht nur (56), sondern auch

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \beta - m)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 u^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}, -m \end{array} \right. \right) \\ \times {}_2F_1(\alpha, \alpha - m; \alpha + \beta - m; 1 - u^2) (u^2 - 1)^{\alpha + \beta - m - 1} u^{1-2\beta} du. \quad (59)$$

Nun hat man wegen (16), (15) und (13)

$$G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k \\ \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2}, -m \end{array} \right. \right) = G_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, -m \end{array} \right. \right) \\ = 2^{m-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}-m} G_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} m + \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} m - \frac{1}{4} \end{array} \right. \right) = 2^{m+\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}-m} K_{m+\frac{1}{2}}(\zeta).$$

²⁵⁾ [13], Formel (7).

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2} + k$, $\beta = \frac{1}{2} - k$ und $u = \sec \varphi$ in (59), so findet man also mit Rücksicht auf (24), falls $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(m) < 1$ ist,

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= \frac{2^{m+\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}-m}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{m+\frac{1}{2}}(z \sec \varphi) \\ &\quad \times \mathbf{P}_{k-\frac{1}{2}}^m(\cos 2\varphi) \sin^{1-m} \varphi \cos^{2m-\frac{3}{2}} \varphi d\varphi; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

diese Beziehung war bekannt ²⁶⁾.

Die (59) entsprechende Integraldarstellung für das Produkt

$W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz)$ ist infolge (1) und (12)

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz) &= \frac{z}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(\frac{1}{2}-k-m) \Gamma(\alpha+\beta-m)} \\ &\times \int_1^\infty G_{2,4}^{4,1} \left(\frac{1}{4} z^2 u^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}-k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}, -m \end{matrix} \right) \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha-m; \\ \alpha+\beta-m; \end{matrix} 1-u^2 \right) (u^2-1)^{\alpha+\beta-m-1} u^{1-2\beta} du. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Nun beweist man leicht mit Hilfe von (16), (15) und (14)

$$G_{2,4}^{4,1} \left(\frac{1}{4} \zeta^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}-k \\ \frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, -m \end{matrix} \right) = 2^{1-2k} \zeta^{\frac{1}{2}-m} \Gamma(\frac{1}{2}-k-m) \Gamma(1-k) S_{2k+m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\zeta).$$

Aus (61) mit $\alpha = \frac{1}{2} + k$, $\beta = \frac{1}{2} - k$ und $u = \sec \varphi$ ergibt sich somit unter Berücksichtigung von (24)

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz) &= \frac{2^{1-2k} z^{\frac{1}{2}-m} \Gamma(1-k)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} \\ &\times \int_0^{\frac{1}{2}\pi} S_{2k+m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(z \sec \varphi) \mathbf{P}_{k-\frac{1}{2}}^m(\cos 2\varphi) \sin^{1-m} \varphi \cos^{2m-\frac{3}{2}} \varphi d\varphi; \end{aligned} \right\}$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$, $\Re(k) < \frac{1}{2}$, $\Re(k-m) < \frac{1}{2}$ und $\Re(m) < 1$.

Viele mit (57), (58), (60) und (62) verwandten Relationen treten auf in früheren Arbeiten ²⁷⁾ des Verfassers.

²⁶⁾ [19], Formel (54).

²⁷⁾ [13], 871—874; [15]; [18], 359; [19], 943—947. Siehe auch BAILEY, [1].

Mathematics. — *Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrales erster Art in der Nähe von $k=1$. I. Von S. C. VAN VEEN.*
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Die bekannte Entwicklung:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 k^{2n}, \quad |k| < 1$$

divergiert für $k=1$ und man hat

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left\{ K(k) - \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \right\} = 0.$$

Die vollständige Entwicklung von $K(k)$ in der Nähe von $k=1$ lautet:¹⁾

$$K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 (1-k^2)^n \left\{ \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + 2 \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^m}{m} \right\} \quad (1)$$

$$|1-k^2| < 1; \quad |\arg(1-k^2)| < \pi$$

Die Ableitung von (1) ist nicht sehr einfach; sie beruht auf ziemlich verwickelten Integraltransformationen, bzw. Transformationen der hypergeometrischen Funktion.

Deshalb wird es vielleicht nicht ohne Interesse sein, wenn im Folgenden die Ableitung einer *andren* Entwicklung für $K(k)$ in der Nähe von $k=1$ gegeben wird, die

1^o sehr einfach und ganz elementar ist,

2^o beträchtlich schneller konvergiert als (1).

Diese Entwicklung lautet:

$$K(k) = \frac{2}{1+k} \log \frac{2^{\frac{1}{2}} + (1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} + \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^n. \quad (2)$$

¹⁾ Vgl. z.B.: O. SCHLÖMILCH, Compendium der Höheren Analysis, 1866, Bd. II; S. 313–318. TANNERY et MOLK, Fonctions elliptiques. T. III, § 536 et 537, insbes. S. 214. Fussnote 2.

(Zusatz bei der Korrektur.) Die Reihe (1) ist ihrem Inhalte nach identisch mit einem Ergebnis von Gauss über $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-x\right)$. [Werke III, S. 217, Gl. 90.]

mit

$$A_1 = \frac{1}{4}; A_2 = \frac{3}{32}; A_3 = \frac{37}{192}; A_4 = \frac{305}{3072}; A_5 = \frac{4981}{30720}; \dots$$

Allgemein ist:

$$A_n = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2-4m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+3-4m)} \right) \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1-2m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2-2m)} \right)^2. \quad (3)$$

(ein leeres Produkt wie z.B. $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m$ für $m=0$, wird $=1$ gesetzt).

Für A_n gilt weiter die folgende Abschätzung:

$$0 < A_n < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der Ausdruck (2) gilt im Innern der von $k=1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten rechten Halbebene $R(k) > 0$, mit:

$$|\arg(1+k)| < \frac{\pi}{2}; |\arg(1-k)| < \pi.$$

Die Ableitung von (2) beruht wesentlich auf der LANDENSchen Transformation. (Hilfssatz 1).

Zunächst wird k als reell vorausgesetzt, mit $0 \leq k < 1$.

Hilfssatz 1: Für k reell, $0 \leq k < 1$ ist:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega}} \quad . \quad (5)$$

$$\text{wo } \beta = \arctg \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}; \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

(LANDENSche Transformation).

Beweis: Man setze

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 2\omega}{k + \cos 2\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\omega} &= \frac{2(1+k \cos 2\omega)}{1+2k \cos 2\omega+k^2}; \\ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} &= \sqrt{\frac{1+(1-k^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1+k \cos 2\omega}{\sqrt{1+2k \cos 2\omega+k^2}}; \\ \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{2 d\omega}{\sqrt{1+2k \cos 2\omega+k^2}} = \frac{2}{1+k} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Aus (6) geht hervor, dass φ variiert von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, wenn ω von 0 bis β variiert, wo $\cos 2\beta = -k$, also:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \dots \dots \dots (8)$$

Aus (7) und (8) folgt (5).

Hilfssatz 2: Für ganzes $n \geq 0$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\beta \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi d\varphi}{\cos \varphi} &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{\cos \beta} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n+1)(2n-1) \dots (2n-2k+1)}{2n(2n-2) \dots (2n-2k)} \cot \operatorname{tg}^{2k} \beta. \end{aligned} \right\} (9)$$

Beweis: Man setze für $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \int_0^\beta \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \int_0^\beta \frac{\operatorname{tg}^{2n-2} \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\beta} \frac{\operatorname{tg}^{2n-2} \varphi}{\cos \varphi} d \operatorname{tg} \varphi - u_{2n-2} = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{(2n-1) \cos \beta} - \frac{1}{2n-1} \int_0^\beta \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi} - u_{2n-2} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{(2n-1) \cos \beta} - \frac{u_{2n}}{2n-1} - u_{2n-2}. \end{aligned}$$

$$\frac{2n}{2n-1} u_{2n} = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{(2n-1) \cos \beta} - u_{2n-2} \quad (n \geq 1) \dots \dots (10)$$

$$u_0 = \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \dots \dots \dots (11)$$

Aus (10) und (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^n (-1)^m \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)} \frac{\operatorname{tg}^{2m-1} \beta}{(2m-1) \cos \beta} &= \\ \sum_{m=2}^n (-1)^m \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} u_{2m} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)} u_{2m-2} \right) &= \\ (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} u_{2n} + 2u_2 &= (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} u_{2n} + \\ &\quad \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right); \end{aligned}$$

$$u_{2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) +$$

$$\frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{(2n+1) \cos \beta} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \frac{(2m+1)(2m+3) \dots (2n+1)}{2m(2m+2) \dots 2n} \cotg^{2n-2m} \beta$$

$$= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) +$$

$$\frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \beta}{(2n+1) \cos \beta} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(2n+1)(2n-1) \dots (2n-2m+1)}{2n(2n-2) \dots (2n-2m)} \cotg^{2m} \beta.$$

w.z.b.w.

Beweis der Entwicklung (2) für reelles k : $0 < k < 1$.

Nach (5) ist:

$$\left. \begin{aligned} \kappa(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega}} = \\ &= \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos^2 \omega + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \sin^2 \omega}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega \sqrt{1+\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{mit } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

Wegen:

$$0 \leq \operatorname{tg} \omega < \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}, \text{ und } 0 < \frac{1-k}{1+k} < 1;$$

darf die Reihe

$$\frac{1}{\cos \omega \sqrt{1+\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n} \frac{\operatorname{tg}^{2n} \omega}{\cos \omega} \quad (13)$$

gliedweise integriert werden im Gebiet $0 \leq \omega \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

Wegen (12) und (13) ist:

$$\begin{aligned}
 K(k) &= \frac{2}{1+k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} \int_0^{\beta} \frac{tg^{2n} \omega \, d\omega}{\cos \omega} = \\
 &= \frac{2}{1+k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} u_{2n} = \\
 &= \frac{2}{1+k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \\
 &+ \frac{2}{1+k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \cdot \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} \times \\
 &\frac{tg^{2n-1} \beta}{\cos \beta} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(2n+1)(2n-1) \dots (2n-2m+1)}{2n \cdot (2n-2) \dots (2n-2m)} \cot g^{2m} \beta
 \end{aligned} \quad (14)$$

wegen (9). Weiter ist, wegen $tg^2 \beta = \frac{1+k}{1-k}$:

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \beta}} = \sqrt{\frac{1-k}{2}}; \sin \beta = \\
 &= \sqrt{\frac{1+k}{2}}; tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1+tg \frac{\beta}{2}}{1-tg \frac{\beta}{2}} = \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{2^{\frac{1}{2}} + (1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Also geht (14) über in:

$$\begin{aligned}
 K(k) &= \frac{2}{1+k} \log \frac{2^{\frac{1}{2}} + (1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} + \\
 &+ \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \cdot \\
 &\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^n \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(2n+1) \dots (2n-2m+1)}{2n \dots (2n-2m)} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Die letzte Summe wird:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{n}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m+n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \\
 & \frac{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2m+1)}{2n \cdot (2n-2) \dots (2n-2m)} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n+m} = \\
 & = \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{n}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^n \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2m)} \cdot \\
 & \frac{(2n-2m-1)(2n-2m-3) \dots (2n-4m+1)}{(2n-2m)(2n-2m-2) \dots (2n-4m)} \\
 & = \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{n}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^n \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \\
 & \left\{ \frac{(2n+1-2m)(2n-1-2m) \dots 1}{(2n+2-2m)(2n-2m) \dots 2} \right\}^2 \left\{ \frac{(2n+2-4m)(2n-4m) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+3-4m)(2n-1-4m) \dots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right\}
 \end{aligned} \quad (16)$$

Mit (15) und (16) ist (2) und (3) für reelle Werte von k , mit $0 < k < 1$ bewiesen.

Um zu beweisen, dass der Ausdruck (2) auch für komplexe Werte von k gilt, werden wir erst A_n abschätzen.

Aus:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} > \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}^2.$$

findet man:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(2n+1-2m)(2n-1-2m) \dots 1}{(2n+2-2m)(2n-2m) \dots 2} \right)^2 \left(\frac{(2n+2-4m)(2n-4m) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+3-4m)(2n+1-4m) \dots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right) < \\
 & < \frac{1}{\pi(n-m+1)} \cdot \frac{1}{2n-4m+3} \sqrt{\frac{\pi(2n-4m+3)}{2}} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} \frac{1}{\sqrt{2n-4m+3}}.
 \end{aligned}$$

2) Diese Ungleichungen folgen sofort aus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Wegen (3) ist also:

$$0 < A_n < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{(n-m+1)\sqrt{2n-4m+3}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

womit (4) bewiesen ist.

Es sei k ein Punkt im Gebiete $R(k) \geq \delta > 0$; $k = \varrho e^{i\varphi}$; $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$; $\varrho < R$.

$$\left| \frac{1-k}{1+k} \right| = \sqrt{\frac{1-2\varrho \cos \varphi + \varrho^2}{1+2\varrho \cos \varphi + \varrho^2}} \leq \sqrt{\frac{1-2\delta + \varrho^2}{1+2\delta + \varrho^2}} = \sqrt{1 - \frac{4\delta}{1+2\delta + \varrho^2}} < \sqrt{1 - \frac{4\delta}{1+2\delta + R^2}} \quad (17)$$

Wegen (4) und (17) konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^n \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (18)$$

gleichmässig in jedem Gebiet $R(k) \geq \delta > 0$; $|k| < R$, wo δ beliebig klein, und R beliebig gross ist.

Somit stellt die Reihe (18) in diesem Gebiete eine analytische Funktion dar.

Ebenfalls stellt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n}$$

in diesem Gebiete eine analytische Funktion dar.

$\frac{2}{1+k} \log \frac{2^{\frac{1}{2}} + (1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}}$ ist analytisch in der von $k=1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten rechten Halbebene $R(k) > 0$.

Weil auch das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

sich in diesem Gebiete analytisch verhält, und die beiden Seiten von (2) in den Punkten des Intervalles der reellen Achse $0 < k < 1$ übereinstimmen, so gilt der Ausdruck (2) im Innern der von $k=1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten rechten Halbebene $R(k) > 0$.

Bemerkung: Nehmen wir k reell, und $k = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, so ist für kleine Werte von ε

$$1 - k^2 \approx 2\varepsilon$$

während

$$\frac{1-k}{1+k} \approx \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{1-k^2}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (19)$$

ist.

Die Reihe (1) ist nach Potenzen von $1 - k^2 \approx 2\varepsilon$ entwickelt.

Die erste Reihe aus (2) ist dagegen nach Potenzen von

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \approx \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

entwickelt, und konvergiert somit viel schneller als (1), während die zweite Reihe aus (2), wegen (19) schneller als die Reihe (1) konvergiert.

Mathematics. — *Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von $k=1$. II. Von S. C. VAN VEEN.*
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Bekanntlich ist für k in der Nähe von $k=1$:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \sim \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Vorausgesetzt wird, dass k nur solche Werte erhält, wobei das Integral seine Bedeutung nicht verliert, also darf k^2 nicht $\equiv 1$ sein. Genauere Annäherungsformeln für $K(k)$ erhält man unter Benutzung der LANDENSchen Transformation:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega}} \cdot \cdot (2)$$

$$\beta = \text{arc. tg } \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad k \text{ reell}; \quad 0 \leq k < 1.$$

(siehe Hilfssatz 1 der vorhergehenden Mitteilung).

Wegen (2) ist:

$$K(k) = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega \sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \text{tg}^2 \omega}}$$

also:

$$\frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega \left\{ 1 + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \text{tg}^2 \omega \right\}} < K(k) < \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega}; \quad 0 < k < 1. \quad (3)$$

Die beide Grenzintegrale liefern:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega \left\{ 1 + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \text{tg}^2 \omega \right\}} = \int_{\omega=0}^{\omega=\beta} \frac{d \sin \omega}{1 - \sin^2 \omega + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \sin^2 \omega} = \\ & = \int_{\omega=0}^{\omega=\beta} \frac{d \sin \omega}{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega} = \frac{1+k}{4\sqrt{k}} \log \frac{1 + \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \sin \beta}{1 - \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \sin \beta} = \\ & = \frac{1+k}{4\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{2k}} = \frac{1+k}{2\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega} &= \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \log \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Aus (3), (4) und (5) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{2}{1+k} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} \\ 0 &< k < 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Während man aus der bekannten Entwicklung (1) der vorhergehenden Mitteilung ablesen kann, dass der Fehler der Annäherungsformel (1) für k in der Nähe von 1

$$\propto \frac{1}{4} (1-k^2) \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \propto \frac{1}{2} (1-k) \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

ist, kann man ohne Schwierigkeit beweisen, dass die Fehler der Majorant- und Minorantwerte in (6) beide

$$< \frac{1}{2\sqrt{2}(1+k)} \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \propto \frac{1}{8\sqrt{2}} (1-k)$$

sind. Obgleich hieraus hervorgeht, dass diese letzteren Formeln erheblich genauer als (1) sind, werden wir den Beweis der genannten Fehler-schätzungen hier unterdrücken, indem wir zeigen, dass das arithmetische Mittel der Majorant- und Minorantwerte in (6) eine wesentlich genauere Approximation der Ordnung $(1-k)^2$ liefert.

Genauer zeigen wir den folgenden Satz:

Satz: Für reelles k , $0 < k < 1$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1-k)^2}{128} &< \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} + \\ &+ \frac{1}{1+k} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} - K(k) < \frac{(1-k)^2}{128} \cdot \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Beweis: Wegen (4) und (5) ist:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} + \frac{2}{1+k} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} \right\} - K(k) = \\
 & = \frac{1}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega} \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega} + 1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}} \right\} = \\
 & = \frac{1}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}} \right\}^2 = \\
 & = \frac{1}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\cos \omega} \left\{ \frac{\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega} \right] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}} \right\}^2 \\
 & \quad \left(\operatorname{tg}^2 \omega = \frac{1+k}{1-k} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Das Integral (8) ist:

$$< \frac{1}{4(1+k)} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \int_0^{\beta} \frac{\operatorname{tg}^4 \omega d\omega}{\cos \omega} = \frac{1}{4(1+k)} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \tag{9}$$

und:

$$\begin{aligned}
 & > \frac{1}{1+k} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \frac{\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^4 \omega \frac{d\omega}{\cos \omega}}{\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2} \right]^2 \left(1 + \frac{1-k}{1+k} \right)} \quad \left(\text{wegen } \operatorname{tg}^2 \omega \leq \frac{1+k}{1-k} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \frac{\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}}{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1+k}} \right)^2} > \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \frac{\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}}{\left(2 \sqrt{\frac{2}{1+k}} \right)^2} \\
 & = \frac{1}{16} \frac{(1-k)^4}{(1+k)^3} \int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = \frac{\operatorname{tg}^4 \beta \sin \beta}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\beta} \operatorname{tg}^4 \omega \cos \omega d\omega. \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{\operatorname{tg}^4 \beta \sin \beta}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\beta} \operatorname{tg} \omega \sin^3 \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 \beta \sin \beta}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^3 \beta}{8} + \frac{3}{8} \int_0^{\beta} \operatorname{tg}^2 \omega \sin^2 \omega \cos \omega d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wegen (11) ist:

$$\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} < \frac{\operatorname{tg}^4 \beta \sin \beta}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \left(\frac{1+k}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

und wegen (12) ist:

$$\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} > \frac{\operatorname{tg}^4 \beta \sin \beta}{8} (2 - \cos^2 \beta) = \frac{1}{8} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \left(\frac{1+k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3+k}{2} \right). \quad (14)$$

Wegen:

$$(k-1)^2 \geq 0 \text{ ist } (k+3)^2 \geq 8(1+k)$$

$$\frac{k+3}{2} \left(\frac{1+k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 2^{\frac{1}{2}} (1+k)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1+k.$$

Also wird (14):

$$\int_0^{\beta} \operatorname{tg}^3 \omega \sin \omega \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} > \frac{1}{8} \frac{(1+k)^3}{(1-k)^2}. \quad (15)$$

Wegen (9) und (13) ist das Integral (8)

$$< \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-k)^2}{128} \cdot \left(\frac{2}{1+k} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

und wegen (10) und (15) ist das Integral (8)

$$> \frac{(1-k)^2}{128}. \quad (17)$$

(16) und (17) liefern das gewünschte Ergebnis.

Bemerkung: In der Nähe von $k=1$ ist

$$\frac{2}{1+k} \approx 1.$$

Die beiden Grenzen in (7) sind also fast gleich $\frac{(1-k)^2}{128}$.

Die Approximationsformel (7) ist sogar sehr gut brauchbar in Fällen, wo k nicht ganz in der Nähe von 1 liegt, wie aus dem folgenden Beispiel erhellt.

Zahlenbeispiel:

$$k=0,7 \quad (k^2=0,49).$$

$$K(k)=K(0,7)=1,8457.$$

(JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln. dritte Aufl. 1938. S. 78.)

$$\log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = 1,72296.$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} = \frac{1}{0,83666} \log \frac{2,48706}{0,547723} = 1,80850$$

$$\frac{2}{1+k} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} = \frac{20}{17} \log \frac{2,71805}{0,547723} = \frac{1,88479}{3,69329} +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2k}}{\sqrt{1-k}} + \frac{2}{1+k} \log \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-k}} \right\} = \underline{1,84664^5}.$$

Der Fehler ist

$$> \frac{1}{128} (0,3)^2 = 0,00070$$

und

$$< \frac{1}{128} (0,3)^2 \cdot \left(\frac{20}{17} \right)^{\frac{5}{2}} = 0,00106$$

und

$$K(k) < 1,84664^5 - 0,00070 = 1,8459$$

$$K(k) > 1,84664^5 - 0,00106 = 1,8456.$$

Mathematics. — *Séries se rapportant aux fonctions holomorphes bornées.* Par Prof. J. WOLFF. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Soit $w = u + vi = f(z) = f(x + yi)$ holomorphe et $u > 0$ dans le demi-plan $D (x > 0)$.

Considérons dans D une suite S de points $a_n = a_n + b_n i$, $n = 1, 2, \dots$, ayant les propriétés

$$1^0. \quad |\alpha_{n+1}| \geq c |\alpha_n|, \quad c > 1 \text{ et fixe, } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$2^0. \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg \alpha_n \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ et fixe, } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

I. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Im \left(\frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} \right) \right| \cdot \dots \quad (3)$$

est convergente.

Pour le démontrer posons

$$z + f(z) = F(z).$$

La dérivée angulaire λ de $F(z)$ à l'infini est au moins égale à l'unité,

$$F(z) = \lambda z + \omega(z), \quad \Re \omega(z) \geq 0 \quad (4)$$

et la limite angulaire de $\omega(z)/z$ pour z infini est nulle.

$$\Im \left(\frac{F(z)}{z} \right) = \Im \left(\frac{f(z)}{z} \right) = \Im \left(\frac{\omega(z)}{z} \right) \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon. \quad (5)$$

De (4) et (5) on conclut que dans l'angle $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, pour $z \rightarrow \infty$

$$\Im \left(\frac{f(z)}{z} \right) \sim \lambda \arg \frac{F(z)}{z} \quad (6)$$

Donc pour montrer que la série (3) converge il suffit de démontrer la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \arg \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \right| \cdot \dots \quad (7)$$

L'inégalité $\lambda > 0$ entraîne, d'après un théorème de FATOU¹⁾, la convergence de l'intégrale sur l'axe imaginaire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \arg \frac{F(ti)}{ti} \right| \cdot \frac{dt}{1+|t|} \cdot \dots \dots \dots (8)$$

Il est à remarquer que dans (8)

$$F(ti) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x + ti),$$

la limite existant et étant différente de zéro presque partout.

En tout point z de D nous pouvons exprimer $\arg F(z)/z$ par l'intégrale de POISSON, parceque cette fonction est harmonique et bornée dans D .

Par suite

$$\arg \frac{F(a_n)}{a_n} = \frac{a_n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \arg \frac{F(ti)}{ti} \cdot \frac{dt}{|ti - a_n|^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Fixons une valeur de t . Si $|\alpha_k| \leq |t|$, alors $|ti - \alpha_k| \geq |t| \sin \varepsilon$, d'où

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} &\leq \frac{1}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_{n=1}^k a_n \leq \frac{1}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_{n=1}^k |\alpha_n| \leq \\ &\leq \frac{|\alpha_k|}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_{n=1}^k c^{-(n-k)} < \frac{1}{(1-c^{-1})|t| \sin^2 \varepsilon} = \frac{G}{|t|}, \quad G \text{ fixe.} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Si $|\alpha_k| > |t|$, alors $|ti - \alpha_k| > |\alpha_k| \sin \varepsilon$, d'où

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} &< \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{|\alpha_n|^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \sum_{n=k}^{\infty} |\alpha_n|^{-1} < \\ &< \frac{1}{(1-c^{-1})|\alpha_k| \sin^2 \varepsilon} = \frac{G}{|\alpha_k|} < \frac{G}{|t|}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Enfin sans perte de généralité nous supposons que $|\alpha_1| > 1$. En vertu de (11) on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left| \arg \frac{F(ti)}{ti} \right| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} \cdot dt \leq \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{2G}{|\alpha_1|} < 2G. \quad (12)$$

¹⁾ P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de TAYLOR. Acta Mathematica 30, p. 363.

De (10) et (11) résulte l'inégalité valable pour toute valeur de t

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} < \frac{2G}{|t|} \quad \dots \quad (13)$$

car on n'a qu'à considérer le premier indice k surpassant $|t|$.

Or d'après (9), (12) et (13) on a

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \arg \frac{F(a_n)}{a_n} \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \arg \frac{F(ti)}{ti} \right| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^1 + \int_{|t|>1} \right) < 2G + \frac{2G}{\pi} \int_{|t|>1} \left| \arg \frac{F(ti)}{ti} \right| \frac{dt}{|t|}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) et la convergence de (8) mettent en évidence la convergence de la série (7), donc de la série (3).

L'exemple

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{z - 2^n i} + \frac{1}{z + 2^n i} \right) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^2 + 2^{2n}}$$

montre que, si la suite (a_n) ne satisfait pas à (2), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \left(\frac{f(a_n)}{a_n} \right)$ peut diverger. Posons $a_n = 1 + 2^n i$; alors

$$\Im \left(\frac{f(a_n)}{a_n} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+k+2}}{(1 + 2^{2k} - 2^{2n})^2 + 2^{2n+2}} < -1.$$

Une homographie conduit du théorème I à l'énoncé:

Soit $f(z)$ holomorphe et $|f(z)| < 1$ dans le cercle $D(|z| < 1)$, a un point sur la circonférence de D , et a_n , $n = 1, 2, \dots$, une suite de points dans D telle que

$$1^\circ. \quad |a - a_{n+1}| \leq c |a - a_n|, \quad c < 1 \text{ et fixe, } n = 1, 2, \dots$$

$$2^\circ. \quad \left| \arg \frac{a - a_n}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ et fixe, } n = 1, 2, \dots,$$

alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Im \left(\frac{a - a_n}{a + a_n} \cdot \frac{a + f(a_n)}{a - f(a_n)} \right) \right|$$

est convergente.

La démonstration du théorème I montre que :

II. Pour toute fonction $F(z)$ holomorphe et à partie réelle positive dans le demi-plan D , dont la dérivée angulaire λ à l'infini est positive, la série (7) est convergente.

Ce résultat permet de retrouver simplement un théorème sur l'itération d'une représentation conforme que j'ai démontré dans une note aux *Comptes rendus* d'Avril 1940 et cité dans les *Proceedings*¹⁾.

III. Si $f(z)$ est holomorphe et à partie réelle positive dans le demi-plan $D(x > 0)$, alors :

1°. Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im(a_n f(a_n)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

est convergente sur toute suite S satisfaisant à (1) et (2), la convergence est absolue ;

2°. condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (15) sur toute telle suite S est que la limite angulaire μ de $z f(z)$ pour $z \rightarrow \infty$ soit finie.

A. La condition est suffisante. μ étant fini on a

$$f(z) = \frac{\mu}{z + \omega(z)},$$

$\mu > 0$, $\Re(\omega(z)) \geq 0$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} \arg \frac{\omega(z)}{z} = 0$, donc

$$|\Im(a_n f(a_n))| = \left| \Im \frac{\mu}{1 + \frac{\omega(a_n)}{a_n}} \right| = \mu \cdot \frac{\left| \Im \left(\frac{\omega(a_n)}{a_n} \right) \right|}{\left| 1 + \frac{\omega(a_n)}{a_n} \right|^2} \sim \mu \cdot \left| \Im \left(\frac{\omega(a_n)}{a_n} \right) \right| \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

En vertu du théorème I la série (15) converge absolument sur toute suite S satisfaisant à (1) et (2).

B. La condition est nécessaire. Supposons que (15) converge sur toute suite S satisfaisant à (1) et (2).

α étant un point arbitraire d'un domaine $H_\eta \left\{ |\alpha| > \eta > 0, |\arg \alpha| < \frac{\pi}{2} - \eta \right\}$, considérons la suite S_α des points $a_n = c^n \alpha$, $c > 1$ et fixe, $n = 1, 2, \dots$ et montrons que la série (15) sur S_α est uniformément convergente dans

¹⁾ J. WOLFF, Théorème sur l'itération d'une représentation conforme. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, XLIII, 8, p. 1016 (1940).

H_η . En effet, dans le cas contraire il existerait un nombre $\varepsilon > 0$ tel que H_η contiendrait un point β auquel correspondent deux entiers n_1 , et n_2 satisfaisant à

$$n_2 \equiv n_1 > 1 \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n=n_1}^{n_2} \Im(\beta_n f(\beta_n)) \right| > \varepsilon;$$

de même H_η contiendrait un point γ auquel correspondent deux entiers n_3 et n_4 satisfaisant à

$$n_4 \equiv n_3 > n_2, \quad |\gamma_{n_3}| > c^{n_3} \eta > c |\beta_{n_2}| \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n=n_3}^{n_4} \Im(\gamma_n f(\gamma_n)) \right| > \varepsilon,$$

et ainsi de suite, ce qui donnerait naissance à une suite

$$S(\beta_{n_1} \dots \beta_{n_2}, \gamma_{n_3} \dots \gamma_{n_4}, \dots) = S(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots)$$

satisfaisant à (1) et (2) et sur laquelle (15) ne convergerait pas.

La série (15) sur S_α est donc uniformément convergente dans H_η .

Posons

$$\Im_p^q(a) = \sum_{n=p}^q \Im(c^n a f(c^n a)) \quad \text{et} \quad \Re_p^q(a) = \sum_{n=p}^q \Re(c^n a f(c^n a)).$$

$\Im_p^q(a)$ tend vers zéro pour $q \equiv p \rightarrow \infty$ uniformément dans H_η , donc, parceque $\Re_p^q(a)$ et $\Im_p^q(a)$ sont des fonctions harmoniques conjuguées,

$$\Re_p^q(a_1) - \Re_p^q(a) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad q \equiv p \rightarrow \infty,$$

c'est à dire

$$\Re_{p+1}^{q+1}(a) - \Re_p^q(a) = \Re(a_{q+1} f(a_{q+1})) - \Re(a_p f(a_p)) \rightarrow 0.$$

Par conséquent $\Re(a_n f(a_n))$ tend pour $n \rightarrow \infty$ vers une limite $\mu < \infty$ et, parceque $\Im(a_n f(a_n)) \rightarrow 0$, la limite angulaire μ de $z f(z)$ à l'infini est finie. D'après A la convergence de (15) est absolue sur toute suite S satisfaisant à (1) et (2) et le théorème est démontré.

Considérons maintenant dans le demi-plan D une suite \bar{S} de points α_n , $-\infty < n < \infty$, satisfaisant à (1) et (2), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

IV. Si la limite angulaire μ de $z f(z)$ à l'infini est finie, alors la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Im(\alpha_n f(a_n)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

est absolument convergente.

La série (15) étant absolument convergente il ne reste qu'à démontrer la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Im(\alpha_{-n} f(a_{-n}))| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Posons $a_{-n} = \frac{1}{\beta_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. La série (17) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Im \left(\frac{f\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}{\beta_n} \right) \right| \dots \dots \dots (18)$$

Or $f\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe et à partie réelle positive dans D et la suite des β_n satisfait à (1) et (2). Donc en vertu du théorème I la série (18) est convergente.

Enfin, α étant un point arbitraire de D et c une constante > 1 , considérons la suite \bar{S}_α des points $a_n = c^n \alpha$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

V. Si la limite angulaire μ de $z f(z)$ à l'infini est finie, alors la série (16) sur S_α est uniformément convergente dans tout domaine

$$\bar{H}_\eta \left\{ 0 < \eta < |\alpha| < \eta^{-1}, |\arg \alpha| < \frac{\pi}{2} - \eta \right\}.$$

Nous avons déjà démontré que (15) sur S_α converge uniformément dans H_η , donc dans \bar{H}_η . Il ne reste qu'à démontrer l'uniformité de la convergence de (17) dans \bar{H}_η . Cela revient à démontrer l'uniformité de la convergence de (18), où $\beta = \beta_0 = 1/\alpha$ est dans \bar{H}_η et $\beta_n = c^n \beta$.

Or la méthode, qui a servi à montrer que (15) sur S_α converge uniformément dans H_η , démontre la même propriété de (18) dans H_η , donc dans \bar{H}_η .

Remarquons que la somme de (16) sur \bar{S}_α est une fonction harmonique $h(\alpha)$ dans D , ayant la propriété

$$h(c\alpha) = h(\alpha).$$

Des théorèmes IV et V on déduit :

VI. Si la limite angulaire μ de $z f(z)$ à l'infini est finie, alors, α étant un point variable et β un point fixe dans D , la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \{a_n f(a_n) - \beta_n f(\beta_n)\}$$

où $a_n = c^n \alpha$, $\beta_n = c^n \beta$, $c > 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, converge uniformément sur tout ensemble fermé et borné dans D . Sa somme est par conséquent une fonction $\phi(\alpha)$ holomorphe dans D , satisfaisant à

$$\phi(c\alpha) = \phi(\alpha) + A, \quad A \equiv 0 \text{ constant et indépendant de } \beta.$$

$A = 0$, si $z f(z)$ est une constante positive ou nulle, et dans ce cas seulement. Alors $\phi(\alpha)$ est identiquement nulle.

Mathematics. — *Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der PFAFF'schen Gleichungen für den einfachsten Fall $m=2$. II.*
 Von W. VAN DER KULK. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

2. *Vollständig integrele \mathfrak{S}_d^2 -Felder. Notwendige Bedingungen für die vollständige Integrität.*

Eine X_2 in X_n lässt sich darstellen durch Gleichungen von der Form

$$\xi^\kappa = f^\kappa(\eta^a); \kappa = 1, \dots, n; a = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

wo die Matrix der

$$B_a^\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \partial_a \xi^\kappa; \partial_a = \frac{\partial}{\partial \eta^a}; \kappa = 1, \dots, n; a = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

genau den Rang 2 hat. Jedem Punkte der X_2 ist also ein nichtverschwindender einfacher Pseudobivektor zugeordnet

$$[v^{\mu\lambda}] \stackrel{\text{def}}{=} [B_{[2}^\mu B_{1]}^\lambda], \dots \quad (2.3)$$

dessen Zweirichtung mit der tangierenden Zweirichtung der X_2 in diesem Punkte zusammenfällt. Liegt dieser Pseudobivektor, als Punkt in der lokalen \mathfrak{P}^2 von $\xi^\kappa = f^\kappa(\eta^a)$ aufgefasst, für jeden Wert der η^a auf der lokalen \mathfrak{S}_d^2 eines \mathfrak{S}_d^2 -Feldes, so nennen wir die X_2 eine *Integral- X_2* dieses \mathfrak{S}_d^2 -Feldes. Bilden die Funktionen $\overset{i}{F}$; $i = d+1, \dots, 2(n-2)$ eine \mathfrak{S} -Basis des Feldes¹⁾, so ist das identisch in den η^a erfüllt sein der Gleichungen

$$\overset{i}{F}(f^\kappa(\eta^a), B_{[2}^\mu B_{1]}^\lambda) = 0; i = d+1, \dots, 2(n-2) \quad (2.4)$$

notwendig und hinreichend dafür, dass die X_2 (2.1) eine Integral- X_2 ist. Ein Wertsystem $\underset{0}{\xi}^\kappa, \underset{0}{v}^{\mu\lambda} \neq 0$ des Feldes heiße *fortsetzbar*, wenn es mindestens eine Integral- X_2 gibt, die den Punkt $\underset{0}{\xi}^\kappa$ enthält und in diesem Punkte die Zweirichtung von $\underset{0}{v}^{\mu\lambda}$ tangiert. Ist jedes Wertsystem $\underset{0}{\xi}^\kappa, \underset{0}{v}^{\mu\lambda} \neq 0$ des Feldes fortsetzbar, so heiße das \mathfrak{S}_d^2 -Feld *vollständig integrele*.

¹⁾ Vgl. Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der PFAFF'schen Gleichungen für den einfachsten Fall $m=2$. I, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 41, 452—463 (1941) (hier weiter zitiert als V. P. I), § 1.

Wir werden nun zuerst eine notwendige Bedingung für die Fortsetzbarkeit ableiten. Es sei (2.1) die Gleichung einer Integral- X_2 , die den Punkt ξ^x_0 enthält und die Zweirichtung von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor_0$ tangiert. Es seien die Werte $\eta^a = \eta^a_0$; $a = 1, 2$ die Parameterwerte des Punktes ξ^x_0 . Ist eine beliebige Zerlegung

$$v^{\mu\lambda}_0 = B^{\mu}_{[2}_0 B^{\lambda]}_0 (2.5)$$

gegeben, so können wir die Parameter η^a auf der X_2 so wählen, dass in η^a_0

$$(B^x_a)_{\eta^b = \eta^b_0} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_a f^x)_{\eta^b = \eta^b_0} = B^x_a; \quad x = 1, \dots, n; \quad a, b = 1, 2 . \quad (2.6)$$

ist. Differenziert man (2.4) nach η^b und setzt man sodann $\eta^a = \eta^a_0$; $a = 1, 2$ ein, so entsteht die Gleichung

$$B^{\omega}_b (\bar{\partial}_{\omega} \bar{F})_0 + 2 (\bar{F}_{\mu\lambda})_0 (\partial_b B^{\mu}_{[2}_0 B^{\lambda]}_0) = 0; \quad i = d + 1, \dots, 2(n-2); \quad b = 1, 2 \quad (2.7)$$

wo

$$\bar{\partial}_{\omega} \bar{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi^{\omega}} (v^{\mu\lambda} \text{ nicht differenzieren}). . . . (2.8)$$

ist, und $()_0$ steht für $()_{\xi^x = \xi^x_0; v^{\mu\lambda} = v^{\mu\lambda}_0}$ bzw. $()_{\eta^b = \eta^b_0}$.

Damit haben wir bewiesen, dass das System von Gleichungen

$$B^{\omega}_b (\bar{\partial}_{\omega} \bar{F})_0 + 2 (\bar{F}_{\mu\lambda})_0 Z^{\mu}_{b[2} B^{\lambda]}_0 = 0; \quad i = d + 1, \dots, 2(n-2); \quad b = 1, 2 \quad (2.9)$$

mit den in den Indizes a und b symmetrischen Unbekannten Z^x_{ba} ; $x = 1, \dots, n$; $a, b = 1, 2$ die Lösung $Z^x_{ba} = (\partial_b B^x_a)_0$ besitzt. Wir formulieren den so erhaltenen Satz folgendermassen:

Notwendig für die vollständige Integrabilität eines \mathfrak{S}^2_d -Feldes ist, dass für jedes System $\xi^x, v^{\mu\lambda} = B^{\mu}_{[2} B^{\lambda]} \neq 0$ des Feldes die Gleichungen

$$B^{\omega}_b \bar{\partial}_{\omega} \bar{F} + 2 \bar{F}_{\mu\lambda} Z^{\mu}_{b[2} B^{\lambda]}_0 = 0; \quad i = d + 1, \dots, 2(n-2); \quad b = 1, 2 . \quad (2.10)$$

mit den $3n$ Unbekannten Z^x_{ba} ; $Z^x_{ba} = Z^x_{ab}$; $x = 1, \dots, n$; $a, b = 1, 2$, oder auch die Gleichungen

$$v^{\varrho\omega} \{ \bar{\partial}_{\omega} \bar{F} + 2 \bar{F}_{x\mu} v^{\lambda\mu} Z^x_{\omega\lambda} \} = 0; \quad i = d + 1, \dots, 2(n-2) \quad (2.11)$$

$\varrho = 1, \dots, n$

mit den $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$ Unbekannten $Z^x_{\mu\lambda}$; $Z^x_{\mu\lambda} = Z^x_{\lambda\mu}$; $x, \mu, \lambda = 1, \dots, n$, mindestens eine Lösung haben.

Dass man die Lösbarkeit von (2.10) ersetzen darf durch die Lösbarkeit von (2.11), folgt daraus, dass sich jeder Lösung $Z_{\mu\lambda}^x$ von (2.11) eine Lösung Z_{ba}^x von (2.10) zuordnen lässt mittels der Formel

$$Z_{ba}^x = B_b^\mu B_a^\lambda Z_{\mu\lambda}^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.12)$$

und dass sich umgekehrt mittels (2.12) aus jeder Lösung Z_{ba}^x von (2.10) unendlich viele Lösungen von (2.11) berechnen lassen.

Man zeigt leicht, dass sich die Lösbarkeit von (2.10) (bzw. (2.11)) nicht ändert, wenn man die $\overset{i}{F}$ durch eine andere \mathfrak{S} -Basis des Feldes, z.B. durch die $\overset{i'}{F}$; $i' = d' + 1', \dots, 2' (n' - 2')$, ersetzt ²⁾.

Ein \mathfrak{S}_d^2 -Feld, das der obigen notwendigen Bedingung genügt, heiße ein *vollständiges* \mathfrak{S}_d^2 -Feld. Diese notwendige Bedingung für die vollständige Integrabilität ist *nicht* hinreichend. Z.B. ist das \mathfrak{S}_1^2 -Feld in X_4 mit der \mathfrak{S} -Basis

$$\overset{2}{F} = v^{13}, \overset{3}{F} = v^{24}, \overset{4}{F} = v^{23} + \varphi v^{14}, \varphi = e^{\xi^3 \xi^4} \quad . \quad . \quad . \quad (2.13)$$

zwar vollständig, trotzdem ist dieses Feld aber nicht vollständig integrabel, denn die einzigen Integral- X_2 dieses Feldes sind

$$\xi^1 = \text{konst.}, \xi^2 = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.14)$$

und

$$\xi^3 = \text{konst.}, \xi^4 = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.15)$$

Die Erörterungen dieses Paragraphen lassen sich auf beliebige m -Vektoren ($m > 2$) übertragen.

3. Das Haupttheorem für vollständige \mathfrak{S}_d^2 -Felder.

Bevor wir zum Beweise des angekündigten Theorems übergehen, mögen einige Bemerkungen betreffs der Regelfläche \mathfrak{R}_t vorhergehen, die die Formulierung der Anfangsbedingungen einer Integral- X_2 ermöglichen.

In der lokalen \mathfrak{P}^1 von ξ^x betrachten wir einen beliebigen Punkt $\lfloor v^x \rfloor$ auf der lokalen \mathfrak{R}_t des zu einem \mathfrak{S}_d^2 -Felde gehörigen \mathfrak{R}_t -Feldes. Es mögen diejenigen durch $\lfloor v^x \rfloor$ gehenden auf dieser \mathfrak{R}_t liegenden Geraden, deren zugeordnete Pseudovektoren in der \mathfrak{P}^2 von ξ^x Punkte auf der lokalen \mathfrak{S}_d^2 darstellen, einen $(r+1)$ -dimensionalen Kegel \mathfrak{R}_{r+1} bilden (sodass es also ∞^r solcher durch $\lfloor v^x \rfloor$ gehenden Geraden gibt). Die Gleichungen von \mathfrak{R}_{r+1} lauten

$$\overset{i}{F}(\xi^x, v^{[\mu} V^{2]}) = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2) \quad . \quad . \quad . \quad (3.1)$$

²⁾ Es bilden nämlich die $\overset{i}{F}$ zusammen mit den $\overset{r}{\Phi}$ eine Basis des Feldes, während auch die $\overset{i'}{F}$ zusammen mit den $\overset{r}{\Phi}$ eine Basis desselben Feldes darstellen. Durch Anwendung von V. P. I (1, 7) beweist man nun leicht die oben aufgestellte Behauptung.

(V^x ; $x=1, \dots, n$, sind die laufenden Koordinaten in der \mathfrak{P}^1), denn erfüllt $\lfloor V^x \rfloor$ die Gleichungen (3. 1), so folgt daraus, dass $\lfloor v^{\mu\lambda} V^\lambda \rfloor$ in der \mathfrak{P}^2 von ξ^x einen Punkt auf der lokalen \mathfrak{S}_d^2 darstellt (vgl. V.P. I, § 1). Die Gerade, die dem Pseudobivektor $\lfloor v^{\mu\lambda} V^\lambda \rfloor$ zugeordnet ist, liegt also einerseits auf der \mathfrak{R}_t von ξ^x , aber enthält andererseits ersichtlich die Punkte $\lfloor v^x \rfloor$ und $\lfloor V^x \rfloor$. Daraus geht hervor, dass $\lfloor V^x \rfloor$ ein Punkt auf der \mathfrak{R}_{r+1} ist. Umgekehrt beweist man leicht, dass jeder Punkt, der auf der \mathfrak{R}_{r+1} liegt, die Gleichungen (3. 1) erfüllt. Jedem Wertsystem ξ^x, v^e des \mathfrak{R}_t -Feldes ist eine solche \mathfrak{R}_{r+1} zugeordnet. Nun haben wir aber in V.P. I, S. 463 eine $\mathfrak{U}(\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e)$ konstruiert, für welche folgende Eigenschaft gilt. Ist $\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e$ ein in dieser \mathfrak{U} liegendes Wertsystem so, dass $\xi^x, v^{\mu\lambda}$ ein beliebiges Wertsystem des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes und $\lfloor v^e \rfloor$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor$ ist, so bilden alle Punkte von der Form $\lfloor v^\lambda Z_\lambda^x \rfloor$, wo Z_λ^x die Formen $\overset{i}{F}_{x\mu} v^{\lambda\mu} Z_\lambda^x$ annulliert, in der \mathfrak{P}^1 von ξ^x einen t -dimensionalen linearen Raum³⁾. Dazu besitzt diese $\mathfrak{U}(\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e)$ noch eine zweite Eigenschaft, die sich folgendermassen formulieren lässt. Die \mathfrak{R}_{r+1} , die dem Wertsystem ξ^x, v^e zugeordnet ist (ξ^x und v^e sind dem obenerwähnten Wertsystem $\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e$ entnommen) und die also laut Definition die Gerade von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor$ enthält, hat in allen Punkten auf dieser Geraden denselben $(r+1)$ -dimensionalen Tangentialraum, der dargestellt wird durch die Gleichungen

$$\overset{i}{F}_{\mu\lambda} v^{\mu\lambda} V^\lambda = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2). \quad (3.2)$$

Aus dieser Eigenschaft, die sich mittels einer Parameterdarstellung des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes beweisen lässt, folgt noch, dass $r = d - t + 1$ ist. Infolge (1. 21) genügt r der Ungleichung

$$\max. (d-n+2, 0) \leq r \leq \frac{d}{2}. \quad (3.3)$$

Im folgenden soll das \mathfrak{S}_d^2 -Feld und das zugehörige \mathfrak{R}_t -Feld nur in dieser $\mathfrak{U}(\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e)$ betrachtet werden.

Wir geben jetzt eine Formulierung des Haupttheorems, die auch die Anfangsbedingungen einer Integral- X_2 mit enthält.

Es sei ein vollständiges \mathfrak{S}_d^2 -Feld gegeben, dessen \mathfrak{R}_t -Feld *abwickelbar* ist. Wir nennen das \mathfrak{R}_t -Feld eines \mathfrak{S}_d^2 -Feldes *abwickelbar*, wenn für jedes Wertsystem $\xi^x, v^{\mu\lambda}$ des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes die lokale \mathfrak{R}_t von ξ^x in allen Punkten auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor$ denselben t -dimensionalen Tangentialraum besitzt. Ist eine Zerlegung $v^{\mu\lambda} = B_{[2}^\mu B_{1]}^\lambda$ gegeben, so, dass $\xi^x, v^{\mu\lambda}, B_a^e$; $a=1, 2$ in $\mathfrak{U}(\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e)$ liegt, so ist für die Abwickelbarkeit

³⁾ Denn die dem Wertsystem $\xi^x, v^{\mu\lambda}, v^e$ zugeordnete Zahl r hat den maximalen Wert t . (Vgl. V.P. I. S. 463).

n.u.h., dass der lineare t -dimensionale Raum aller Punkte $\lfloor Z_1^x \rfloor$ zusammenfällt mit dem linearen t -dimensionalen Raum aller Punkte $\lfloor Z_2^x \rfloor$, wo die Z_a^x ; $x=1, \dots, n$; $a=1, 2$ die Formen $\bar{F}_{\mu\lambda}^i B_{[1}^{\mu} Z_2^{\lambda]}$ annullieren. Der Beweis dieser Behauptung folgt leicht aus dem in V.P. I, S. 463 aufgestellten Satz.

Es sei ferner eine X_1

$$\xi^x = f^x(\eta^1); \quad x=1, \dots, n \quad (\eta^1 \text{ ist ein Parameter}) \quad (3.4)$$

gegeben, deren Tangentialvektor $\frac{df^x}{d\eta^1}$ für jeden Wert von η^1 in der lokalen \mathfrak{P}^1 des Punktes $\xi^x = f^x(\eta^1)$ einen Punkt auf der lokalen \mathfrak{R}_t darstellt. Eine solche X_1 nennen wir eine *Integral- X_1* des \mathfrak{R}_t -Feldes. Es möge diese Integral- X_1 den Punkt ξ_0^x enthalten und in diesem Punkte den Vektor v_0^x tangieren.⁴⁾ Sodann lässt sich der Parameter η^1 auf der X_1 so wählen, dass

$$\xi_0^x = f^x(\eta_0^1); \quad x=1, \dots, n \quad (3.5)$$

und

$$v_0^x = \left(\frac{df^x}{d\eta^1} \right)_{\eta^1=\eta_0^1}; \quad x=1, \dots, n \quad (3.6)$$

ist. Dabei ist η_0^1 der Parameterwert von ξ_0^x . Man sieht leicht ein, dass es unendlichviele solcher Integral- X_1 gibt.

Schliesslich möge eine die Integral- X_1 (3.4) enthaltende X_{n-r} gegeben sein mit den Parametergleichungen

$$\xi^x = \psi^x(\eta^u); \quad x=1, \dots, n; \quad u=1, \dots, n-r \quad (3.7)$$

Die Parameter η^u auf dieser X_{n-r} lassen sich so wählen, dass

$$\psi^x(\eta_0^1, \eta_0^2, \dots, \eta_0^{n-r}) = f^x(\eta^1); \quad x=1, \dots, n \quad (3.8)$$

ist, wo η_0^u ; $u=1, \dots, n-r$ die Parameterwerte des Punktes ξ_0^x sind.

Jedem Punkte auf dieser X_{n-r} ist ein einfacher nichtverschwindender Pseudo- $(n-r)$ -Vektor zugeordnet

$$\lfloor v^{x_1 \dots x_{n-r}} \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor R_{[1}^{x_1} \dots R_{n-r]}^{x_{n-r}} \rfloor; \quad R_u^x \stackrel{\text{def}}{=} \partial_u \psi^x; \quad u=1, \dots, n-r \quad (3.9)$$

der Tangential- $(n-r)$ -Vektor der X_{n-r} . Dem Tangential- $(n-r)$ -Vektor

$$\lfloor v^{x_1 \dots x_{n-r}} \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor R_{[1}^{x_1} \dots R_{n-r]}^{x_{n-r}} \rfloor; \quad R_u^x \stackrel{\text{def}}{=} (R_u^x)_{\eta^v=\eta_0^v}; \quad u, v=1, \dots, n-r \quad (3.10)$$

⁴⁾ Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass wir in V.P. I, S. 463 das Wertsystem $\xi_0^x, v_0^{\mu\lambda}, v_0^e$ so gewählt haben, dass $\xi_0^x, v_0^{\mu\lambda}$ ein Wertsystem des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes ist und $\lfloor v_0^e \rfloor$ auf der Geraden von $\lfloor v_0^{\mu\lambda} \rfloor$ liegt, sodass ξ_0^x, v_0^e dem \mathfrak{R}_t -Felde angehört.

im Punkte ξ^x_0 lässt sich in der \mathfrak{B}^1 von ξ^x_0 ein linearer $(n-r-1)$ -dimensionaler Raum \mathfrak{B}_{n-r-1} zuordnen mit den Parametergleichungen

$$\lfloor V^x \rfloor = \lfloor \sigma^u R^x_u \rfloor; \quad x=1, \dots, n; \quad u=1, \dots, n-r \quad (\sigma^u \text{ sind die Parameter}). \quad (3.11)$$

Wegen (3.6) und (3.8) ist aber $v^x_0 = R^x_1$, sodass diese \mathfrak{B}_{n-r-1} den Punkt $\lfloor v^x_0 \rfloor = \lfloor R^x_1 \rfloor$ enthält. Wir nehmen nun an, es sei die X_{n-r} (3.7) ausserdem noch so gegeben, dass diese \mathfrak{B}_{n-r-1} die durch $\lfloor v^x_0 \rfloor = \lfloor R^x_1 \rfloor$ gehende Gerade von $\lfloor v^{\mu\lambda}_0 \rfloor$ enthält. Diese Gerade liegt aber auch in dem $(r+1)$ -dimensionalen Raume

$$(\overset{i}{F}_{\mu\lambda})_0 v^\mu V^\lambda = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2); \quad \dots \quad (3.12)$$

$$(\)_0 = (\)_{\xi^x_0 = \xi^x_0, v^{\mu\lambda}_0 = v^{\mu\lambda}_0}$$

(der Tangentialraum der \mathfrak{R}_{r+1} des Wertsystems $\xi^x_0, v^{\mu\lambda}_0 = R^{\mu\lambda}_1$ in den Punkten auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda}_0 \rfloor$). Wir nehmen nun endlich an, es sei die X_{n-r} (3.7) auch noch so gegeben, dass die Durchschneidung der \mathfrak{B}_{n-r-1} mit dem linearen Raum (3.12) nur aus der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda}_0 \rfloor$ besteht und keine anderen Punkte enthält. Man überzeugt sich leicht davon, dass es tatsächlich sogar unendlich viele X_{n-r} gibt, die die obenaufgestellten Annahmen erfüllen. (Wegen $(n-1)+1 = (n-r-1) + (r+1)$ haben nämlich die \mathfrak{B}_{n-r-1} und der Raum (3.12) im allgemeinen einen 1-dimensionalen Durchschnitt).

Sodann gilt das Theorem:

Es gibt eine und nur eine Integral- X_2 des \mathfrak{S}^2_d -Feldes, die die Integral- X_1 (3.4) enthält, in der X_{n-r} (3.7) liegt, und in ξ^x_0 die Zweirichtung von $\lfloor v^{\mu\lambda}_0 \rfloor$ tangiert.

Den Beweis teilen wir in zwei Teile.

a. *Aufstellung der Differentialgleichungen der Integral- X_2 .*

Die Gleichungen des \mathfrak{R}_t -Feldes lassen sich, eventuell nach Umnúmerieren der Koordinaten ξ^x , in der Form

$$v^\alpha = f^\alpha(\xi^x, v^\varepsilon); \quad x=1, \dots, n; \quad \varepsilon=1, \dots, t+1; \quad \alpha=t+2, \dots, n \quad (3.13)$$

schreiben mit in einer $\mathfrak{U}(\xi^x, v^\varepsilon)$ analytischen Funktionen f^α . Es ist $v^\alpha_0 = f^\alpha(\xi^x_0, v^\varepsilon_0)$. Die Gleichungen der \mathfrak{R}_{t+1} , die einem Wertsystem ξ^x, v^μ des \mathfrak{R}_t -Feldes zugeordnet ist, sind

$$\overset{i}{F}(\xi^x, v^{\mu\lambda} V^\lambda) = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2). \quad \dots \quad (3.14)$$

In diesen Gleichungen hat man sich also die v^α durch die rechten Glieder von (3.13) ersetzt zu denken. Ist $\lfloor V^\alpha \rfloor_0$ ein nicht mit $\lfloor v^\alpha \rfloor_0$ zusammenfallender Punkt auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor_0$, so ist $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor_0 = \lfloor v^{[\mu} V^{\lambda]} \rfloor_0$, und es liegt $\lfloor V^\alpha \rfloor_0$ auf der \mathfrak{R}_{r+1} , die dem Wertsystem ξ^α, v^μ des \mathfrak{R}_t -Feldes angehört. Der Tangentialraum dieser \mathfrak{R}_{r+1} im Punkte $\lfloor V^\alpha \rfloor_0$ wird dargestellt durch die Gleichungen

$$(F_{\mu\lambda})_0 v^\mu V^\lambda = 0; i = d + 1, \dots, 2(n-2) \quad (3.15)$$

(vgl. (3.12)). Dieser Raum ist $(r+1)$ -dimensional und es gibt somit unter den linken Gliedern von (3.15) $n-r-2$, die linear unabhängig sind. Durch Umnumerieren lässt sich erreichen, dass

$$(\bar{F}_{\mu\lambda})_0 v^\mu V^\lambda = 0; \alpha = d + 1, \dots, n + t - 3^5) \quad (3.16)$$

diese $n-r-2$ unabhängigen linken Glieder sind. Daraus folgt die Existenz einer $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, v^\mu)_0$ und einer $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, V^\mu)_0$, so, dass die \mathfrak{R}_{r+1} eines in $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, v^\mu)_0$ liegenden Wertsystems ξ^α, v^μ des \mathfrak{R}_t -Feldes in $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, V^\mu)_0$ vollständiger Durchschnitt ist der $n-r-2$ Hyperflächen

$$\bar{F}(\xi^\alpha, v^{[\mu} V^{\lambda]}) = 0; \alpha = d + 1, \dots, n + t - 3. \quad (3.17)$$

Wir werden jetzt für einen beliebigen Punkt $\xi^\alpha = \psi^\alpha(\eta^u)$ auf der X_{n-r} (3.7) die Schnittpunkte dieser \mathfrak{R}_{r+1} mit dem linearen $(n-r-2)$ -dimensionalen Raum

$$\lfloor V^\alpha \rfloor = \lfloor \sigma^\varphi R^\alpha_\varphi \rfloor; \varphi = 2, \dots, n-r \text{ (} \sigma^\varphi \text{ sind Parameter)} \quad (3.18)$$

bestimmen. Man erhält diese Schnittpunkte durch Lösung der Gleichungen

$$\bar{F}(\psi^\alpha(\eta^u), v^{[\mu} R^{\lambda]}_\varphi \sigma^\varphi) = 0; \alpha = d + 1, \dots, n + t - 3; \quad (3.19) \\ \varphi = 2, \dots, n-r$$

nach den σ^φ . Wir können aber die Parameter η^u ; $u = 1, \dots, n-r$ auf der X_{n-r} (3.7) so wählen, dass

$$V^\alpha_0 = R^\alpha_2 \quad (3.20)$$

ist und dass zugleichzeit die Gleichung (3.8) gültig bleibt. Sodann ist

$$\sigma^\varphi_0 = \sigma^\varphi_0 \begin{cases} = 1 \text{ für } \varphi = 2 \\ = 0 \text{ für } \varphi = 3, \dots, n-r \end{cases} \quad (3.21)$$

⁵⁾ Der Index α durchläuft tatsächlich $n-r-2$ Werte, denn $(n+t-3) - d = n - (d-t+1) - 2 = n-r-2$.

für $\eta^u = \eta^u_0$; $v^z = v^z_0$; $u = 1, \dots, n-r$; $z = 1, \dots, t+1$ ersichtlich eine Lösung von (3.19). Für diese Lösung hat aber die Matrix

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma^r} \right)_0; a = d+1, \dots, n+t-3; r = 2, \dots, n-r; \quad (3.22)$$

$$(\quad)_0 = (\quad)_{\eta^u = \eta^u_0, v^z = v^z_0, \sigma^r = \sigma^r_0}$$

den höchsten Rang $n-r-2$. Denn sonst würden die \mathbb{P}_{n-r-1} mit den Gleichungen (3.11) und der lineare Raum (3.12) einen mindestens zweidimensionalen Durchschnitt besitzen. Das ist aber entgegen der Voraussetzung, dass die \mathbb{P}_{n-r-1} (3.11) und der Raum (3.12) nur die Gerade von \mathbb{P}_{n-r-1} gemeinschaftlich haben sollen. Nach einem Satze aus der Theorie der Funktionaldeterminanten lassen sich also die σ^r aus (3.19) bis auf einen skalaren Faktor eindeutig als analytische Funktionen

$$\sigma^r = \sigma^r(\eta^u, v^z); r = 2, \dots, n-r; u = 1, \dots, n-r; \quad (3.23)$$

$$z = 1, \dots, t+1$$

in einer $\mathbb{H}(\eta^u, v^z)$ so lösen, dass diese Lösung für $\eta^u = \eta^u_0, v^z = v^z_0$ in σ^r übergeht. Wegen $\sigma^2 = 1 \neq 0$ ist $\sigma^2 \neq 0$ in einer $\mathbb{H}(\eta^u, v^z)$. Wir können in dieser \mathbb{H} den skalaren Faktor in (3.23) somit so wählen, dass $\sigma^2 = 1$ ist.

Gehen wir jetzt zur Aufstellung der Differentialgleichungen der gesuchten X_2 über. Dazu nehmen wir an, es existiere eine solche X_2 , die also Integral- X_2 ist und den obenformulierten Anfangsbedingungen genügt. Auf dieser in der X_{n-r} (3.7) liegenden X_2 lassen sich nun η^1 und η^2 als Parameter wählen. Dies folgt daraus, dass die X_2 in ξ^x die Zweirichtung von $\mathbb{P}_{n-r-1}^{[a]} = \mathbb{P}_{n-r-1}^{[a]} \mathbb{V}^{[a]} = \mathbb{P}_{n-r-1}^{[a]} \mathbb{R}^{[a]}$ tangiert. Die X_2 lässt sich also in der Form

$$\eta^b = g^b(\eta^1, \eta^2); b = 3, \dots, n-r \quad (3.24)$$

schreiben. Da die X_2 die Integral- X_1 (3.4) enthält, ist infolge (3.8) für jeden Wert von η^1

$$\eta^b = g^b(\eta^1, \eta^2); b = 3, \dots, n-r \quad (3.25)$$

Die Gleichungen dieser X_2 in X_n sind

$$\xi^x = \psi^x(\eta^1, \eta^2, g^b); x = 1, \dots, n; b = 3, \dots, n-r \quad (3.26)$$

Die Zweirichtung der X_2 wird aufgespannt durch die zwei Vektoren

$$B_a^{\xi^x} = \partial_a \{ \psi^x(\eta^1, \eta^2, g^b) \} = R_a^x + (\partial_a g^b) R_b^x; a = 1, 2 \quad (3.27)$$

Für $\eta^a = \eta^a_0$, d.h. für den Punkt ξ^x_0 , gehen diese Vektoren auf Grund des vorhergehenden in R_a^x ; $a = 1, 2$ über. Da die X_2 (3.26) eine Integral- X_2

des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes ist, gilt

$${}^i F(\psi^*(\eta^1, \eta^2, g^b), B_{[1}^\mu B_{2]}^\lambda) = 0; i = d+1, \dots, 2(n-2) \quad (3.28)$$

und ist $\psi^*(\eta^1, \eta^2, g^b), B_1^\mu$ ein in einer $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, v^\mu)$ liegendes Wertsystem des \mathfrak{N}_t -Feldes. Dieses Wertsystem erfüllt also die Gleichungen (3.13). Daraus und aus (3.28) und (3.27) folgt, dass

$$\sigma^2 = 1, \sigma^b = \partial_2 g^b; b = 3, \dots, n-r \quad (3.29)$$

für $\eta^b = g^b; v^\varepsilon = B_1^\varepsilon = R_1^\varepsilon + (\partial_1 g^\varepsilon) R_\varepsilon^\varepsilon; b, e = 3, \dots, n-r; \varepsilon = 1, \dots, t+1$, eine Lösung von (3.19) ist. Wegen $B_a^\alpha = R_a^\alpha$ für $\eta^b = \eta_0^b; b = 1, 2$ geht diese Lösung für $\eta^b = \eta_0^b; b = 1, 2$ in σ_0^α über. Da es aber nur eine einzige solche Lösung gibt, nämlich (3.23), folgt

$$\partial_2 g^b = \sigma^b(\eta^1, \eta^2, g^e, R_1^\varepsilon + (\partial_1 g^\varepsilon) R_\varepsilon^\varepsilon); b, e = 3, \dots, n-r \quad (3.30)$$

Dabei sind die R_u^ε als bekannte Funktionen der η^1, η^2 und der Unbekannten g^b zu betrachten. Damit (3.24) die gesuchte Integral- X_2 darstellt, ist es also notwendig, dass die g^b ein Lösungssystem von (3.30) bilden, das der Anfangsbedingung (3.25) genügt. Das CAUCHY-KOWALEWSKI'sche Existenztheorem lehrt aber, dass es ein einziges solches Lösungssystem $g^b(\eta^1, \eta^2)$ gibt. *Es gibt also höchstens eine Integral- X_2 , die den gestellten Anfangsbedingungen genügt.*

b. Beweis, dass die Lösung von (3.30), die den Anfangsbedingungen (3.25) genügt, die gesuchte Integral- X_2 liefert.

Die Zweirichtung der X_2 (3.26), wo die g^b jetzt diejenige Lösung von (3.30) bilden, die (3.25) erfüllt, wird auch jetzt durch die $B_a^\alpha; a = 1, 2$ aus (3.27) aufgespannt. Die B_a^α gehen auf Grund von (3.25), (3.23) und (3.30) für $\eta^b = \eta_0^b; b = 1, 2$ in R_a^α über. Daraus folgt, dass diese in der X_{n-r} (3.7) liegende X_2 , die wegen (3.25) die X_1 (3.4) enthält, in ξ_0^α die Zweirichtung von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor = \lfloor R_1^{\mu\alpha} R_2^{\lambda\beta} \rfloor$ tangiert. Wir müssen also nur noch beweisen, dass sie eine Integral- X_2 ist. Dazu bemerken wir, dass für η^a in einer bestimmten $\mathfrak{U}(\eta^a)$ das Wertsystem $\psi^*(\eta^1, \eta^2, g^b), B_1^\varepsilon$ in derjenigen $\mathfrak{U}(\xi^\alpha, v^\varepsilon)$ liegt, wo die f^α aus (3.13) analytisch sind. Man kann also in dieser \mathfrak{U} den Vektor $'B_1^\alpha$

$$'B_1^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} B_1^\varepsilon; 'B_1^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^\alpha(\psi^*(\eta^1, \eta^2, g^b), B_1^\varepsilon) \quad (3.31)$$

$$\varepsilon = 1, \dots, t+1; \alpha = t+2, \dots, n$$

bilden. Auf Grund dessen, dass g^b (3.30) genügt, gilt dann

$${}^i F(\psi^*(\eta^1, \eta^2, g^b), 'B_{[1}^\mu B_{2]}^\lambda) = 0; i = d+1, \dots, 2(n-2) \quad (3.32)$$

Könnten wir also beweisen, dass $'B_1^x = B_1^x$ wäre, so wäre die X_2 (3.26) eine Integral- X_2 . Nennen wir

$$'B_1^x - B_1^x \stackrel{\text{def}}{=} \theta^x; \quad x = 1, \dots, n, \quad \dots \quad (3.33)$$

so verschwinden infolge (3.31) die θ^i ; $i = 1, \dots, t+1$. Wir müssen also beweisen, dass auch die θ^a ; $a = t+2, \dots, n$ verschwinden. Dazu differenzieren wir (3.32) nach η^1 und η^2

$$\left. \begin{aligned} B_1^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} + \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ (\partial_1 'B_1^\mu) B_2^\lambda + 'B_1^\mu (\partial_1 B_2^\lambda) \} &= 0 \\ B_2^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} + \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ (\partial_2 'B_1^\mu) B_2^\lambda + 'B_1^\mu (\partial_2 B_2^\lambda) \} &= 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2). \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Da aber das \mathfrak{S}_d^2 -Feld vollständig ist, gibt es Funktionen Z_{ab}^x ; $Z_{ab}^x = Z_{ba}^x$; $x = 1, \dots, n$; $a, b = 1, 2$ der η^1 und η^2 , die den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 'B_1^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} - \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ Z_{11}^\mu B_2^\lambda + 'B_1^\mu Z_{12}^\lambda \} &= 0 \\ B_2^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} - \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ Z_{21}^\mu B_2^\lambda + 'B_1^\mu Z_{22}^\lambda \} &= 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

genügen. Durch Substraktion folgt aus (3.34) und (3.35)

$$\left. \begin{aligned} a \left\{ \theta^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} - \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ (Z_{11}^\mu + \partial_1 'B_1^\mu) B_2^\lambda + 'B_1^\mu (Z_{12}^\lambda + \partial_1 B_2^\lambda) \} \right\} &= 0 \\ b \left\{ \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ (Z_{21}^\mu + \partial_2 'B_1^\mu) B_2^\lambda + 'B_1^\mu (Z_{22}^\lambda + \partial_2 B_2^\lambda) \} \right\} &= 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2). \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Aus (3.36b) folgt, dass der Punkt $\lfloor Z_{21}^\mu + \partial_2 'B_1^\mu \rfloor$ in dem Tangentialraum der lokalen \mathfrak{R}_t von ψ^x im Punkte $\lfloor 'B_1^\mu \rfloor$ liegt. Wegen der Abwickelbarkeit des \mathfrak{R}_t -Feldes, liegt $\lfloor Z_{21}^\mu + \partial_2 'B_1^\mu \rfloor$ also auch in dem Tangentialraum derselben \mathfrak{R}_t im Punkte $\lfloor B_2^\lambda \rfloor$. Daraus folgt, dass es einen Vektor Z_1^x gibt, so, dass

$$\bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ Z_1^\mu B_2^\lambda + 'B_1^\mu (Z_{21}^\lambda + \partial_2 'B_1^\lambda) \} = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2) \quad (3.37)$$

ist. Aus (3.36a) und (3.37) folgt, wegen $\partial_1 B_2^x = \partial_2 B_1^x$

$$\theta^\omega \bar{\partial}_\omega \bar{F} + \bar{F}_{\mu\lambda}^i \{ Z^\mu B_2^\lambda + 'B_1^\mu \partial_2 \theta^\lambda \} = 0; \quad i = d+1, \dots, 2(n-2), \quad (3.38)$$

wo $Z^\mu = -Z_{11}^\mu - \partial_1 'B_1^\mu + Z_1^\mu$ ist. Um aus (3.38) ein System von Differentialgleichungen für die θ^a zu gewinnen, beweisen wir mit Hilfe von (3.38) zuerst folgenden Satz. Ist $H(\xi^x, v^\mu)$ eine auf dem \mathfrak{R}_t -Felde verschwindende Funktion, die analytisch ist in einer $\mathfrak{U}(\xi_0^x, R_2^\mu)$, so gilt

$$\theta^\omega (\bar{\partial}_\omega H)' + (H_\mu)' \partial_2 \theta^\mu = 0. \quad \dots \quad (3.39)$$

Dabei bedeutet $()'$ Substitution von $\xi^x = \psi^x(\eta^1, \eta^2, g^b)$, $v^\mu = B_2^\mu$, während

$$H_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial v^\mu} \quad \dots \quad (3.40)$$

ist. Zum Beweise bemerken wir, dass $H(\xi^\nu, v^{\mu\lambda} w_\lambda)$ für jede beliebige Wahl von w_λ in einer geeignet gewählten \mathfrak{U} auf dem \mathfrak{S}_d^2 -Felde verschwindet. Denn ist $\xi^\nu, v^{\mu\lambda}$ ein Wertsystem des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes, so ist $\lfloor v^{\mu\lambda} w_\lambda \rfloor$ ein Punkt auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor$, und ist somit $\xi^\nu, v^{\mu\lambda} w_\lambda$ tatsächlich ein Wertsystem des \mathfrak{R}_t -Feldes. Infolge V. P. I, (1.7) lässt sich $H(\xi^\nu, v^{\mu\lambda} w_\lambda)$ also als eine lineare Kombination der $\overset{i}{F}$ und der $\overset{r}{\Phi}$ mit analytischen Koeffizienten schreiben. Differentiation dieser Identität nach ξ^ν und $v^{\mu\lambda}$ gibt, nach geeigneten Substitutionen von $\xi^\nu, v^{\mu\lambda}$ und w_λ , mit Hilfe von (3.38) leicht die zu beweisende Formel (3.39).⁶⁾ Denken wir uns den auf der Geraden von $\lfloor v^{\mu\lambda} \rfloor_0$ liegenden Punkt $\lfloor V^\nu \rfloor_0 = \lfloor R_2^\nu \rfloor_0$ von vornherein so gewählt, dass die f^α aus (3.13) in einer $\mathfrak{U}(\xi_0^\nu, R_2^\nu)$ analytisch sind, so kann man in (3.39) $H = v^\alpha - f^\alpha$ wählen. Sodann folgt, wegen $\theta^\varepsilon = 0$; $\varepsilon = 1, \dots, t+1$,

$$-\theta^\beta (\bar{\partial}_\beta f^\alpha)' + \partial_2 \theta^\alpha = 0; \alpha, \beta = t+2, \dots, n. \quad (3.41)$$

Da aber (3.4) eine in der X_2 (3.26) liegende Integral- X_1 des \mathfrak{R}_t -Feldes ist, folgt aus (3.8), (3.25) und (3.27), dass für $\eta^2 = \eta_0^2$

$$\theta^\alpha(\eta^1, \eta^2) = 0; \alpha = t+2, \dots, n \quad (3.42)$$

ist. Infolge des Theorems von CAUCHY-KOWALEWSKI verschwinden die θ^α also identisch in η^1 und η^2 , w.z.b.w.

Da $\xi_0^\nu, v_0^{\mu\lambda}$ ein beliebiges Wertsystem des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes ist, das nur der Bedingung unterliegt, dass die dem Wertsystem $\xi_0^\nu, v_0^{\mu\lambda}, v_0^\nu$ zugeordnete Zahl τ maximal, nämlich t ist, folgt aus dem bewiesenen Satz, dass das \mathfrak{S}_d^2 -Feld tatsächlich vollständig integrabel ist. Denn ist die Zahl τ eines Wertsystems des \mathfrak{S}_d^2 -Feldes maximal, nämlich t , so gibt es eine \mathfrak{U} dieses Wertsystems, in welcher für jedes Wertsystem des Feldes die τ den maximalen Wert t hat.

⁶⁾ Man hat dabei die Formel $(H_\mu)' B_2^\mu = (H_\mu)' B_1^\mu = 0$ an zu wenden. Diese Formel folgt aus der Tatsache, dass $(H_\mu)' V^\mu = 0$ den Tangentialraum der lokalen \mathfrak{R}_t im Punkte $\lfloor B_2^\mu \rfloor$ enthält.

Mathematics. — *Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL. II.* By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

§ 4. Ayant égard de nouveau à la série I nous remplaçons dans (a) maintenant ν par $\nu + 2n$ et ensuite nous multiplions les deux membres par $(-1)^n (\varrho + 1)(\nu + 2n)$; alors nous trouvons après la sommation sur n de 0 à ∞ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu + 2n) I_{\nu + \varrho + 2n+1}(x) = \frac{\varrho + 1}{2} \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\varrho+1}(a) \frac{x-a}{a} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \quad (8)$$

ou en posant $\varrho = \mu - \nu - 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu + 2n) I_{\mu+2n}(x) = \frac{\mu - \nu}{2} \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\mu-\nu}(a) \frac{x-a}{a} da, \quad R(\mu) > R(\nu) > -1. \quad (9)$$

Le membre gauche de (90) peut être écrit ainsi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu + 2n) I_{\mu+2n}(x) - (\mu - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+2n}(x),$$

et donc selon I comme: $\frac{x}{2} I_{\mu-1}(x) - (\mu - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+2n}(x)$; par conséquent nous trouvons:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+2n}(x) = \frac{x}{\mu - \nu} I_{\mu-1}(x) - \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\mu-\nu}(a) \frac{x-a}{a} da, \quad R(\mu) > R(\nu) > -1.$$

Pour $\nu = \frac{1}{2}$ et $\nu = \frac{3}{2}$ on obtient les formules particulières:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+2n}(x) = \frac{2x}{2\mu-1} I_{\mu-1}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \cos(x-a) \frac{\sqrt{x-a}}{a} da, \quad R(\mu) > \frac{1}{2}.$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+2n}(x) = \frac{2x}{2\mu-3} I_{\mu-1}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu-\frac{3}{2}}(a) \sin(x-a) \frac{\sqrt{x-a}}{a} da, \quad R(\mu) > \frac{3}{2}.$$

ou en remplaçant dans (93) μ par $\mu + 1$:

$$(-1)^n I_{\mu+2n+1}(x) = \frac{2x}{2^{\mu-1}} I_{\mu}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(\alpha) \sin(x-\alpha) \frac{\sqrt{x-\alpha} d\alpha}{\alpha}, R(\mu) > \frac{1}{2}. \quad (93')$$

Après la substitution dans (91) $\mu = 2m + 1$ resp. $\mu = 2m$ (m entier positif ou nulle), de même dans (92) et (93') $\mu = 2m + 2$ resp. $\mu = 2m + 1$, nous trouvons d'après les séries (b) et (c), en changeant les deux membres et après une légère réduction:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m-\nu+1}(\alpha) I_{\nu-1}(x-\alpha) \frac{x-\alpha}{\alpha} d\alpha = \\ & \frac{x\sqrt{2\pi}}{(2m-\nu+1)} I_{2m}(x) - (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, 2m+1 > R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m-\nu}(\alpha) I_{\nu-1}(x-\alpha) \frac{x-\alpha}{\alpha} d\alpha = \\ & \frac{x\sqrt{2\pi}}{(2m-\nu)} I_{2m-1}(x) - (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, 2m > R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(\alpha) \cos(x-\alpha) \cdot \sqrt{x-\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \\ & \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+3} I_{2m+1}(x) + (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(\alpha) \cos(x-\alpha) \cdot \sqrt{x-\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \\ & = \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+1} I_{2m}(x) - (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m+\frac{3}{2}}(\alpha) \sin(x-\alpha) \cdot \sqrt{x-\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \\ & = \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+3} I_{2m+2}(x) + (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m+\frac{3}{2}}(\alpha) \sin(x-\alpha) \cdot \sqrt{x-\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \\ & = \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+1} I_{2m+1}(x) + (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Multiplions les deux membres de (96) par $\sin x$ resp. $\cos x$ et ceux de (98) par $\cos x$ resp. $\sin x$, alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(a) \sin a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a} &= \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+3} \{ \sin x I_{2m+1}(x) - \cos x I_{2m+2}(x) \} + \\ &+ (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sin x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n \{ \sin x I_{2n}(x) - \cos x I_{2n+1}(x) \} \right], m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(a) \cos a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a} &= \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+3} \{ \cos x I_{2m+1}(x) + \sin x I_{2m+2}(x) \} + \\ &+ (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n \{ \cos x I_{2n}(x) + \sin x I_{2n+1}(x) \} \right], m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

En faisant de même à l'égard de (97) et (99) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(a) \sin a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a} &= \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+1} \{ \sin x I_{2m}(x) - \cos x I_{2m+1}(x) \} - \\ &- (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \{ \sin x I_{2n+1}(x) - \cos x I_{2n+2}(x) \} \right], m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+\frac{1}{2}}(a) \cos a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a} &= \frac{x\sqrt{2\pi}}{4m+1} \{ \cos x I_{2m}(x) + \sin x I_{2m+1}(x) \} - \\ &- (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sin x I_0(x) + 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \{ \cos x I_{2n+1}(x) + \sin x I_{2n+2}(x) \} \right], m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

La substitution $m=0$ dans (97), (99), (102) et (103) donne les formules particulières:

$$\int_0^x \cos(x-a) \sin a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = \frac{\pi}{2} \{ 2x I_0(x) - \sin x \}, \quad (104)$$

$$\int_0^x \sin(x-a) \sin a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = \frac{\pi}{2} \{ 2x I_1(x) - I_0(x) + \cos x \}, \quad (105)$$

$$\int_0^x \sin^2 a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = \pi x \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \} + \frac{\pi}{2} \{ \cos x I_0(x) - 1 \}, \quad (106)$$

$$\int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = 2\pi x \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} - \pi \sin x I_0(x). \quad (107)$$

Remarque. Il est clair que les intégrales de ce paragraphe sont très liées à celles du paragraphe précédent; car pour le deuxième membre de (91) on peut écrire:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\mu-\nu} I_{\mu-1}(x) + \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\mu-\nu}(a) da - x \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\mu-\nu}(a) \frac{da}{a} = \\ = \int_0^x I_{\nu-1}(x-a) I_{\mu-\nu}(a) da \end{aligned}$$

d'après (a), c'est celui de (54) pour $\varrho = \nu - 1$.

§ 5. Ayant égard à la série connue¹⁾:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varrho + 2n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} I_{\varrho+2n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+1} \quad (II)$$

nous remplaçons dans (a) ϱ par $\varrho + 2n$ et ensuite nous multiplions les deux membres par $2^{\varrho+1} \frac{(\varrho + 2n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1)}{n!}$; la sommation sur n de 0 à ∞ alors nous donne:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ = \int_0^x I_{\nu}(x-a) \cdot a^{\varrho} da = \int_0^x I_{\nu}(a) \cdot (x-a)^{\varrho} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

En substituant $\nu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}$ nous trouvons les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x a^{\varrho} \cos(x-a) \frac{da}{\sqrt{x-a}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (x-a)^{\varrho} \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x a^{\varrho} \sin(x-a) \frac{da}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (x-a)^{\varrho} \sin a \frac{da}{a}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

¹⁾ NIELSEN, l.c., p. 97, (4).

Multiplions les deux membres de (109) par $\sin x$ resp. $\cos x$ et ceux de (110) par $\cos x$ resp. $\sin x$, alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants :

$$2^e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} \left\{ \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x a^{\varrho} \sin a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

$$2^e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{n!} \left\{ \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x a^{\varrho} \cos a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

La substitution $\varrho = 0$ dans (108) jusqu'à (112) donne les formules particulières :

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{\nu+2n+1}(x) = \int_0^x I_{\nu}(a) da, R(\nu) > -1 \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sin x I_{2n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin a da}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (116)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos x I_{2n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos a da}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (117)$$

L'addition et la soustraction des membres correspondants de (114) et (115) donnent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \frac{da}{\sqrt{a}}, \quad \dots \quad (118)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \frac{da}{\sqrt{a}}. \quad \dots \quad (119)$$

La substitution $\varrho = -\frac{1}{2}$ resp. $\varrho = \frac{1}{2}$ dans (108) jusqu'à (112) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x I_{\nu}(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x I_{\nu}(a) \frac{da}{\sqrt{x-a}}, R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} I_{\nu+2n+\frac{3}{2}}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x I_{\nu}(x-a) \cdot \sqrt{a} da = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x I_{\nu}(a) \cdot \sqrt{x-a} da, R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} I_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\cos a da}{\sqrt{a(x-a)}}, \quad \dots \quad (122)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da, \quad (123)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sin a da}{\sqrt{a(x-a)}}, \quad \dots \quad (124)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} I_{2n+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da, \quad \dots \quad (125)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \{ \sin x I_{2n}(x) - \cos x I_{2n+1}(x) \} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sin a da}{\sqrt{a(x-a)}}, \quad (126)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} \{ \sin x I_{2n+1}(x) - \cos x I_{2n+2}(x) \} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \quad (127)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \{ \cos x I_{2n}(x) + \sin x I_{2n+1}(x) \} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\cos a da}{\sqrt{a(x-a)}}, \quad (128)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} \{ \cos x I_{2n+1}(x) + \sin x I_{2n+2}(x) \} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da. \quad (129)$$

La soustraction resp. l'addition des membres correspondants de (124) et (126), ainsi de (122) et (128), nous donnent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \{ \sin \frac{1}{2} x I_{2n}(x) - \cos \frac{1}{2} x I_{2n+1}(x) \} = 0, \quad (130)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \{ \cos \frac{1}{2} x I_{2n}(x) + \sin \frac{1}{2} x I_{2n+1}(x) \} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \sin \frac{1}{2} x}} \int_0^x \frac{\sin a da}{\sqrt{a(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \cos \frac{1}{2} x}} \int_0^x \frac{\cos a da}{\sqrt{a(x-a)}} \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

§ 6. Remplaçons, ayant égard à II, dans (a) ν par $\nu + 2n$, nous trouvons après la multiplication des deux membres par $\frac{(\nu + 2n) \Gamma(\nu + n + 1)}{n!}$ et la sommation sur n de 0 à ∞ :

$$2^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu + 2n) \Gamma(\nu + n)}{n!} I_{\nu+2n+1}(x) = (\varrho + 1) \int_0^x I_{\varrho+1}(a) (x-a)^{\nu} \frac{da}{a}, \quad \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1. \end{cases} \quad (132)$$

La substitution $\varrho = -\frac{1}{2}$ donne la formule particulière:

$$2^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu + 2n) \Gamma(\nu + n)}{n!} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (x-a)^{\nu} \sin a \frac{da}{a\sqrt{a}}, \quad R(\nu) > -1. \quad (133)$$

En substituant dans (132) et (133) $\nu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}$ on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{4n-1}{2n} I_{2+2n+\frac{1}{2}}(x) = (\varrho + 1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \frac{da}{a\sqrt{x-a}}, \quad R(\varrho) > -1 \quad (134)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{4n+1}{2n} I_{2+2n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\varrho+1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a}, \quad R(\varrho) > -1 \quad (135)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{4n-1}{2n} I_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin a \, da}{a \sqrt{a(x-a)}}, \quad (136)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \cdot \frac{4n+1}{2n} I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin a \cdot \left| \frac{\sqrt{x-a}}{a} \frac{da}{a} \right|. \quad (137)$$

Après avoir changé dans (108) ν avec $\varrho + 1$, nous multiplions les deux membres par $(\varrho + 1)$ et en ajoutons les membres correspondants de (132); alors nous trouvons en remplaçant ensuite ν par $\nu + 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{n!} (\nu + \varrho + 2n + 2) I_{\nu+\varrho+2n+2}(x) = \left. \begin{aligned} &= \frac{(\varrho+1)x}{2^{\nu+1}} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) (x-a)^{\nu} \frac{da}{a}, \left\{ \begin{aligned} R(\nu) &> -1 \\ R(\varrho) &> -1 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (138)$$

de laquelle on déduit pour $\varrho = -\frac{1}{2}$ la formule particulière:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{n!} (\nu + 2n + \frac{3}{2}) I_{\nu+2n+\frac{3}{2}}(x) = \left. \begin{aligned} &= \frac{x}{2^{\nu+1} \sqrt{2\pi}} \int_0^x (x-a)^{\nu} \sin a \frac{da}{a \sqrt{a}}, R(\nu) > -1. \end{aligned} \right\}. \quad (139)$$

La substitution $\nu = -\frac{1}{2}$, $\nu = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$ dans (138) et (139) conduit à:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} (\varrho + 2n + \frac{3}{2}) I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) = \left. \begin{aligned} &= \frac{(\varrho+1)x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \frac{da}{a \sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\}. \quad (140)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varrho + 2n + 2) I_{\varrho+2n+2}(x) = \frac{(\varrho+1)x}{2} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \frac{da}{a}, R(\varrho) > -1 \quad (141)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} (\varrho + 2n + \frac{5}{2}) I_{\varrho+2n+\frac{5}{2}}(x) = \frac{x}{2\pi} \int_0^x \frac{\sin a \, da}{a \sqrt{a(x-a)}}, \quad (142)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + \frac{3}{2}) I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \frac{x}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin a \, da}{a \sqrt{a}}, \quad \dots \quad (143)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1)}{2.4 \dots 2n} (2n+2) I_{2n+2}(x) = \frac{x}{2\pi} \int_0^x \sin a \cdot \left| \frac{\sqrt{x-a}}{a} \frac{da}{a} \right|. \quad (144)$$

§ 7. Ayant égard à la série connue¹⁾:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varrho + 2n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} I_{\varrho + 2n + 1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho - \mu + 1} I_{\mu}(x). \quad (III)$$

— qui se réduit pour $\mu = \varrho$ à (I), afin que nous supposons maintenant $\mu \neq \varrho$, nous remplaçons dans (a) ϱ par $\varrho + 2n$ et multiplions ensuite les deux membres par $2^{\varrho - \mu + 1} \frac{(\varrho + 2n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n}$; après la sommation sur n de 0 à ∞ nous trouvons:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho - \mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} I_{\varrho + 2n + 1}(x) = \\ = \int_0^x I_{\nu}(x-a) I_{\mu}(a) a^{\varrho - \mu} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1. \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (145)$$

En substituant $\nu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}$ on obtient les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho - \mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu}(a) \cos(x-a) \cdot a^{\varrho - \mu} \frac{da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\}. \quad (146)$$

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho - \mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} I_{\varrho + 2n + \frac{3}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu}(a) \sin(x-a) \cdot a^{\varrho - \mu} \frac{da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\}. \quad (147)$$

Multiplions les deux membres de (146) par $\sin x$ resp. $\cos x$ et ceux de (147) par $\cos x$ resp. $\sin x$, alors nous trouvons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho - \mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} \{ \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu}(a) \sin a \cdot a^{\varrho - \mu} \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$$\left. \begin{aligned} 2^{\varrho - \mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n + 1)}{\Gamma(\mu + n + 1)} \binom{\mu - \varrho - 1}{n} \{ \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu}(a) \cos a \cdot a^{\varrho - \mu} \frac{da}{\sqrt{x-a}}. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

¹⁾ NIELSEN, l.c., p. 275, (3).

La substitution $\mu = \varrho + m + 1$ resp. $\mu = \varrho - m - 1$ (m entier positif ou nulle) dans (145) jusqu'à (149) donne les formules particulières :

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_\nu(x-a) I_{\varrho+m+1}(a) \frac{da}{a^{m+1}} = \\ & = \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n)\dots(\varrho+n+1)} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x), \end{aligned} \right\} \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \quad (150)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\varrho+m+1}(a) \cos(x-a) \frac{da}{a^{m+1} \sqrt{x-a}} = \\ & = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n)\dots(\varrho+n+1)} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x), \end{aligned} \right\} \begin{cases} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \quad (151)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\varrho+m+1}(a) \sin(x-a) \frac{da}{a^{m+1} \sqrt{x-a}} = \\ & = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n)\dots(\varrho+n+1)} I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x), \end{aligned} \right\} \begin{cases} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \quad (152)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\varrho+m+1}(a) \sin a \frac{da}{a^{m+1} \sqrt{x-a}} = \\ & = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n)\dots(\varrho+n+1)} \{ \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) - \\ & \quad - \cos x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \}, \end{aligned} \right\} \begin{cases} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \quad (153)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\varrho+m+1}(x) \cos a \frac{da}{a^{m+1} \sqrt{x-a}} = \\ & = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n)\dots(\varrho+n+1)} \{ \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) + \\ & \quad + \sin x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \}, \end{aligned} \right\} \begin{cases} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \quad (154)$$

$$2^{m+2}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\varrho+n}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x I_{\nu}(x-a) I_{\varrho=m-1}(a) a^{m+1} da, \left\{ \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{array} \right\} \quad (155)$$

$$2^{m+2}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\varrho+n}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\varrho-m-1}(a) \cos(x-a) \frac{a^{m+1} da}{\sqrt{x-a}}, \left\{ \begin{array}{l} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{array} \right\} \quad (156)$$

$$2^{m+2}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\varrho+n}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\varrho-m-1}(a) \sin(x-a) \frac{a^{m+1} da}{\sqrt{x-a}}, \left\{ \begin{array}{l} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{array} \right\} \quad (157)$$

$$2^{m+2}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\varrho+n}{m+1} \binom{m+n+1}{n} \{ \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\varrho-m-1}(a) \cdot \sin a \frac{a^{m+1} da}{\sqrt{x-a}}, \left\{ \begin{array}{l} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{array} \right\}$$

$$2^{m+2}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\varrho+n}{m+1} \binom{m+n+1}{n} \{ \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\varrho-m-1}(a) \cos a \frac{a^{m+1} da}{\sqrt{x-a}}, \left\{ \begin{array}{l} R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{array} \right\}$$

Substituons dans (145) $\mu = -\frac{1}{2}$ resp. $\mu = \frac{1}{2}$, alors nous trouvons après une légère réduction :

$$\Gamma(\varrho+1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho+2n+1}{2n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x I_{\nu}(x-a) \cos a \cdot a^{\varrho} da, \left\{ \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{array} \right\} \quad (160)$$

$$\Gamma(\varrho) 2^{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho+2n}{2n+1} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x I_{\nu}(x-a) \sin a \cdot a^{\varrho-1} da, \left\{ \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{array} \right\} \quad (161)$$

ou en remplaçant dans celle-ci ϱ par $\varrho + 1$:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 2}{2n + 1} I_{\nu + \varrho + 2n + 2}(x) = \\ = \int_0^x I_{\nu}(x-a) \sin a \cdot a^{\varrho} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -2. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (161')$$

Multiplions les deux membres de (160) par $\sin x$ resp. $\cos x$ et ceux de (161') par $\cos x$ resp. $\sin x$, alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{ (2n + 1) \sin x I_{\nu + \varrho + 2n + 1}(x) - (2\varrho + 2n + 2) \cos x I_{\nu + \varrho + 2n + 2}(x) \} = \\ = \int_0^x I_{\nu}(a) \sin a \cdot (x-a)^{\varrho} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{ (2n + 1) \cos x I_{\nu + \varrho + 2n + 1}(x) + (2\varrho + 2n + 2) \sin x I_{\nu + \varrho + 2n + 2}(x) \} = \\ = \int_0^x I_{\nu}(a) \cos a \cdot (x-a)^{\varrho} da, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Botany. — *On the development of the stellate form of the pith cells of Juncus species.* II. By R. A. MAAS GEESTERANUS. (Communicated by Prof. G. VAN ITERSON.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

3. *The composition and the double refraction of the walls of the pith cells.*

The walls of the juvenile pith cells of *Juncus* are clearly stainable with ruthene red, while methylene blue gives to them a blue colour, which disappears with acetic acid. All this proves that the walls contain pectin. These walls only give a very weak cellulose reaction, while lignin reactions are entirely negative.

The walls of adult pith cells still give pectin reactions. If no preliminary treatment is given the cellulose reaction is weak in such walls, but after treatment with "eau de Javelle" it becomes strong. This is to be ascribed to the presence of lignin in those walls, though the re-agents to lignin on the adult walls do not give strong reactions and though the walls of the vascular bundles in the leaf prove to be much richer in lignin than those of the stellate cells.

When we examine with the polarization microscope the walls of very juvenile pith cells, as given for instance in fig. 5, no double refraction is seen, but it does occur when the cell arms begin to be visible, as is the case at the stage of fig. 8. Then the thickness of the cell walls is between 0.70 and 1.05 μ but at this stage the walls do not yet contain lignin.

When between crossed nicols a plate of red 1st order is inserted under 45°, placing an arm of a stellate pith cell with the longitudinal direction also under 45°, then in the plane aspect of the cell arm is seen the subtraction colour: yellow 1st order. Closer study of the double refraction of the wall of the arm also shows that the shortest axis of the index ellipsoid in that wall is perpendicular to the face of the wall, as is always the case in cell walls consisting of cellulose, and that the longest axis is parallel to that face and perpendicular to the longitudinal direction of the arm.

So in this stage of development of the pith cells the cellulose micellae in the walls of the arms have a preference for a direction transverse to the longitudinal direction of the arms (it should be remembered that pectin is only very weakly double refractory, so that from the double refraction we can only draw a conclusion with reference to the cellulose cels). So the walls of these arms have a so-called "Röhrenstruktur", in the nomenclature of A. FREY WYSSLING (7).

We have considered if at this stage there is a connection between the strength of the double refraction and the length of the cell arms. This double refraction we have determined in natrium light with the aid of a compensator — according to A. EHRLINGHAUS — in the walls in face aspect (it should be borne in mind that the double refraction is determined of the upper and the lower walls of the arm simultaneously). The results we found for 37 cell arms are represented graphically in a correlation table (see fig. 16), in which the lengths of the arms are given in microns and

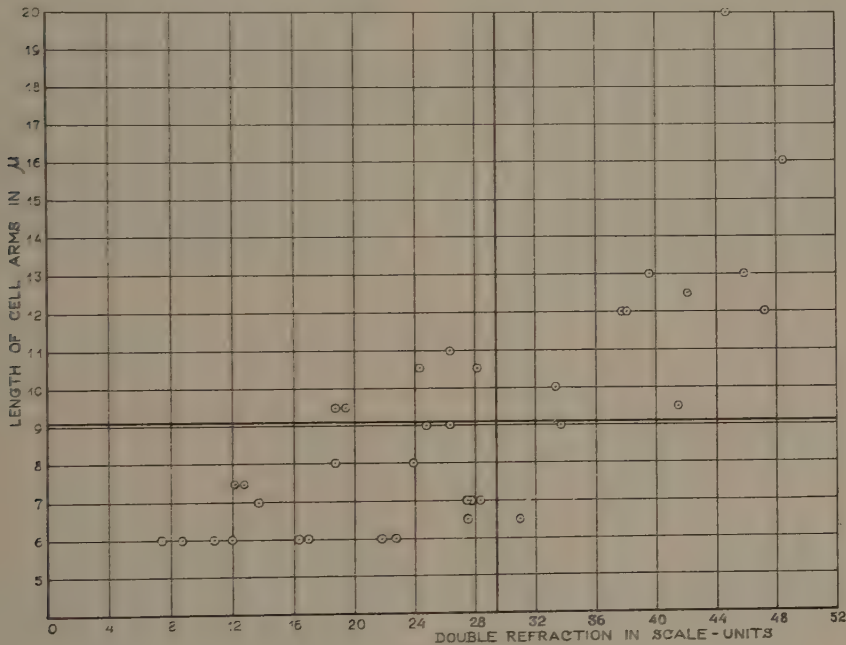


Fig. 16.

Correlation scheme for the double refraction of the (double) wall of the arms of the stellate cells of *Juncus effusus* and the length of these arms; the distribution of the values over the 4 quadrants of the scheme proves the existence of an evidently positive correlation.

the double refraction in units of the scale of the compensator. From that table it is seen that there is an evident correlation for the two quantities and that as a rule the longer cell arms also show higher double refraction.

When the cell arms of adult pith cells are studied with the polarization microscope, it is seen that in the same position in which the arms of more juvenile cells had a subtraction colour, the adult cells show an addition colour. So in the layer which has now been formed against the inner side of the walls (at this stage the thickness of the wall varies between 1.40 and 1.80 μ) the cellulose micellae lie preferably in the longitudinal direction of the cell arms.

At stages of development situated between the two stages of development mentioned last, transitions may be observed a.o. cell arms may be

found which, seen from above, seem to be isotropic; in this case the double refraction of the first cell wall and that of the later added layer neutralize each other.

4. *Observations about the method of development of the cell arms.*

We have seen in the introduction to this communication that the cause of the occurrence of the stellate form of the cells in the adult pith was frequently sought in the stretching of the pith by the rapidly growing surrounding tissue.

We will now first communicate an experiment which supports this conception. From a disk-like sheet of thin vulcanized rubber (we used "Traun's Ideal Rubber Dam" of Traun Rubber Co. Atlantic Rubber MFG. Corporation Successors Med. 6") we cut away a triangle as shown in fig. 17. After that we stretched the sheet uniformly in all directions by fixing the edge of the disk between two metal rings. Next the disk was pulled over the wide neck of a glass jar. The triangular opening was changed into a circular one as seen in fig. 18.

It is at once evident that the change in the shape of the opening is quite like what we observed in the pith at the transition from the stage of fig. 5 to the stages of figures 6 and 7.

We draw the reader's attention to the fact that near the vertices of the original triangle the sheet has become very transparent (the photo was taken with transmitted light); here the sheet was stretched most. This was confirmed by observation of the polarization colours, which were seen when the sheet was viewed between two large polaroid filters with a diameter of 4 cm of the "Polaroid Corporation, Boston Mass". As proved when a gypsum plate red 1st order was inserted the micellae in the rubber sheet near those vertices were placed parallel to the periphery of the round opening (perpendicular to the black lines in fig. 18). From this it follows that the direction of the micellae near the opening in the rubber sheet is different from the direction observed in the cell walls near the inter-cellular spaces.

Still more striking perhaps is the experiment depicted in figures 19 and 20. Fig. 19 shows a rubber sheet on which we have drawn a system of hexagons and into which we afterwards punched small circles at the vertices of these hexagons. In fig. 20 it is seen how the sheet is changed by uniform stretching. The hexagons have obtained a stellate form. Here we have as it were a demonstration of the transition from the stage shown in fig. 7 to that of fig. 9.

In agreement with our remark concerning fig. 18, the micellae in the arms of the stellate figures in fig. 20 lie in the direction of those arms and not transverse to that direction, as is the case in the arms of the pith cells of *Juncus* before the thickening process. From what we remarked about the location of the micellae it follows that an explanation which would account

R. A. MAAS GEESTERANUS: ON THE DEVELOPMENT OF THE STELLATE
FORM OF THE PITH CELLS OF *JUNCUS* SPECIES.

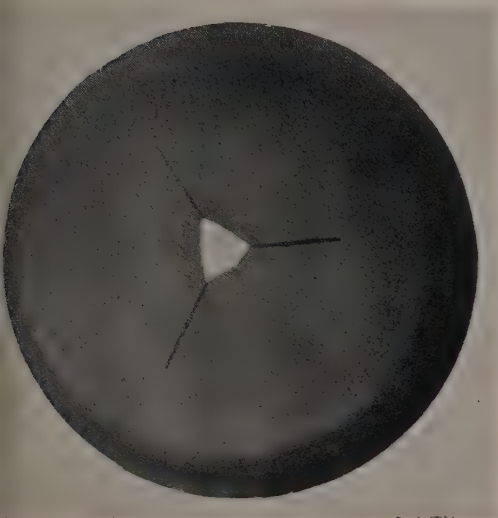


Fig. 17.

Thin sheet of vulcanized rubber, in which a triangular opening has been cut.

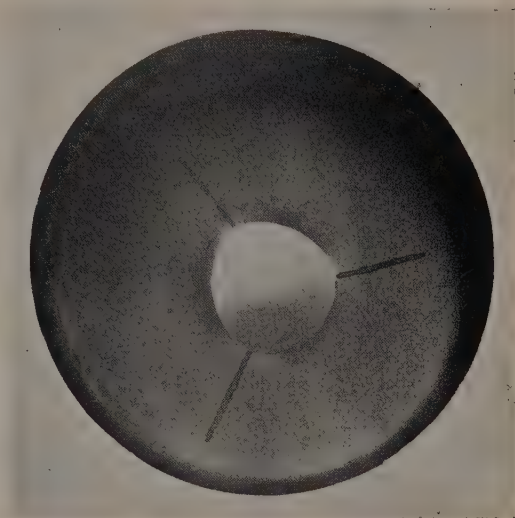


Fig. 18.

The sheet, shown in fig. 17 in non-stretched condition, is here depicted after uniform stretching in radial directions; the triangular opening has become round; the stretching is strongest near — namely perpendicular to — the inklines.

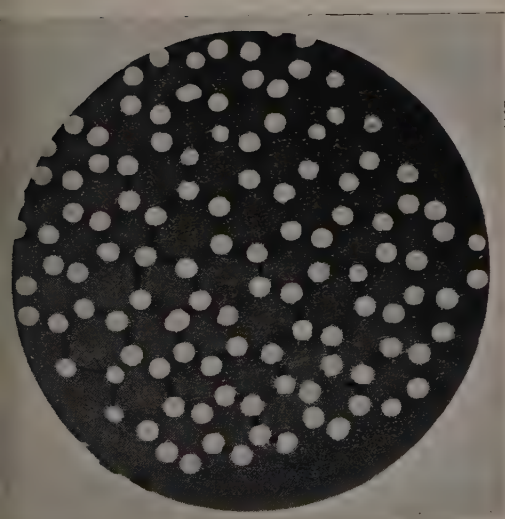


Fig. 19.

Thin sheet of vulcanized rubber, on which a system of hexagonal figures has been drawn with ink, and in which round openings have been punched in the vertices of those figures.

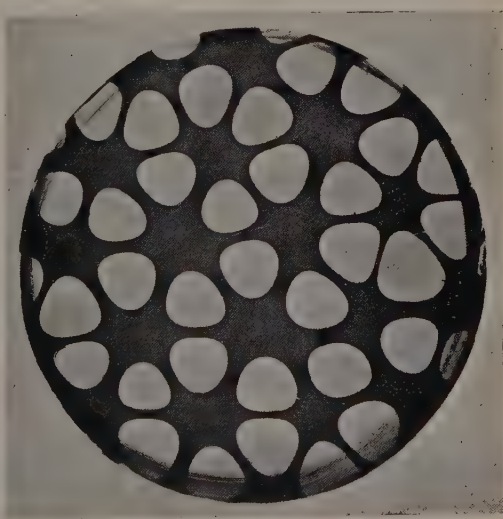


Fig. 20.

The sheet, shown in fig. 19 in non-stretched condition, is here shown after uniform stretching in radial directions; the rubber between the openings assumes the shape of the stellate cells of *Juncus effusus*; here the micellae in the arms have a preference for the longitudinal direction of those arms.

for the stellate form of the pith cells by stretching by the surrounding tissue only cannot be sufficient.

We would observe that as soon as the cell arms have been formed, they may be compared with bodies with a cylindrical wall, which are inflated by inward pressure — in this case by the turgor pressure. In 1937 G. VAN ITERSON Jr (10) drew our attention to the fact that in such a case the greatest tension in the cylindrical wall is not in the direction of the axis, but transverse to it. If the wall of such a body is elastic and can be stretched in all directions to the same extent, it will be stretched most in transverse direction. VAN ITERSON demonstrated this by inflating cylindrical rubber balloons on which squares had been drawn. Such a balloon before and after inflation is shown in fig. 39 of a treatise by Miss. J. M. DIEHL, Miss C. J. GORTER, G. VAN ITERSON Jr. and Miss. A. KLEINHOONTE (1939) (3).

Almost simultaneously with VAN ITERSON, E. C. CASTLE (1937) had arrived at the same conclusion by another method.

If one assumes with VAN ITERSON and with CASTLE that the expansion of the walls determines the direction of the (rod-shaped) cellulose micellae, then it will be clear that the micellae are placed transversely to the direction of the arms, if at least the mechanical stretching of those arms by the surrounding tissue does not neutralize this location. Apparently this is not the case and therefore in our opinion the position of the micellae in the yet unthickened arms of the stellate cells should not be ascribed to the stretching by the surrounding tissue, but to stretching through turgor pressure. Possibly the mechanical stretching of the cell arms by the surrounding tissue occurs only in the first stages, i.e. before the stage of fig. 7.

VAN ITERSON has shown that it was already known to earlier investigators that in walls of cylindrical plant cells, growing in the direction of the cylindre axis, the micellae are generally placed transversely to this direction. In the treatise by Miss DIEHL, Miss GORTER, VAN ITERSON and Miss KLEINHOONTE instances are also cited from recent literature. From these observations we may conclude that in the growth of cell walls new cellulose micellae are deposited preferably laterally to the micellae present. This also explains why the cell arms of the pith cells once they have been formed, grow especially in the direction of those arms. This will be the case even when the surrounding tissue has ceased to stretch those arms. Meanwhile it is by no means impossible that this stretching is continued and it may be that it has a conducive effect on the longitudinal growth of the arms; we would remark here that in consequence of the preferential direction of the micellae the arms are more extensible in longitudinal than in transverse direction. It is possible that this extension creates room for new micellae; the new-deposited micellae will also have a preference for the transverse direction on account of the unequal stretching in the various directions of the wall of the cell arms.

The stronger double refraction of the longer cell arms described above under 3 is probably to be ascribed to a perfectioning process of the "Röhrenstruktur", attended with the longitudinal growth.

Finally we think we can make a suggestion as to the cause of the fact that in the layers formed in the arms at a later stage the micellae are deposited in longitudinal direction and no longer transversely. We mention here that in thickened cell walls the micellae in layers deposited later generally prefer a direction different from that in the initial wall.

We will now point out that through strong extension of a wall in a certain direction the extensibility in that direction becomes smaller and may finally be even very slight (see in this connection the observations about elastic and plastic deformations on pp. 793—796 in the treatise by Miss DIEHL, Miss GORTER, VAN ITERSON and Miss KLEINHOONTE), whereas the extensibility in the direction perpendicular to it is maintained and may even become greater. It is conceivable that before the extra thickening in the cell arms occurs, the extensibility of the wall in the transverse direction has become so slight that the directing action of the turgor becomes inactive in transverse direction on the new-deposited micellae. Under these circumstances the turgor or the mechanical stretching of the surrounding tissue might exclusively call forth stretching in longitudinal direction of the cell arms. The micellae forming the new layers might be directed under the influence of this stretching and hence have a preference for the longitudinal direction of the cell arms.

5. *Summary.*

On the ground of the considerations expressed in the foregoing pages we think we may point out the following circumstances as causing the stellate form of the pith cells of *Juncus*:

a. the special structure of the meristematic tissue, from which those cells are formed, which tissue is namely to be considered as a complex of vertical rows of cubo-octahedrons, piled up on hexagonal faces,

b. the tendency of the polyhedral cells at a very juvenile stage to rounding off near the vertices in consequence of the turgor pressure and their tendency to remain flattened in the centre of the attached polyhedral faces,

c. at a slightly older stage: the mechanical stretching of the pith in radial and to a less extent in vertical directions through the growth of the surrounding tissue, owing to which the intercellular spaces originally bounded by concave faces, are changed into spaces bounded by convex faces, which causes the first stage in the development of the cell arms,

d. the turgor pressure in the cylindrical cell arms through which the walls of those arms are stretched more in transverse than in longitudinal direction, so that the micellae in those walls obtain a preference for a transverse direction, while this enables the arms to grow in length, although

perhaps by the side of this, in this stage too, the mechanical stretching mentioned sub c has a conducive effect on the longitudinal growth,

e. at the last stage: too slight an extensibility of the cell arms in the transverse direction to expect a directing effect on the new-deposited micellae, but now the occurrence of a directing influence of the turgor pressure or of the mechanical tension mentioned sub c in longitudinal direction of the cell arms on these new micellae, which are deposited as a layer with a preference of the micellae for the direction of the cell arms.

This investigation was made under the direction of Prof. G. VAN ITERSON Jr. in the laboratory for technical botany of the "University College of Technology" at Delft.

Botany. — *Cambial Activity as Dependent on the Presence of Growth Hormone and the Non-Resting Condition of Stems.* By CORNELIA A. GOUWENTAK. (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Introduction.

Under natural conditions in springtime a "stimulus" emanating from the buds is required for the growth resumption of the cambium. In diffuse porous wood this occurs when the buds are sprouting (JOST 1891, 1893). In ringporous wood, as e.g. in *Fraxinus*, the "stimulus" already travels downward before the buds are visibly swollen (COSTER 1927).

Since these publications it was suggested many times (vide SNOW 1933 and COSTER 1927) that the activation of the cambium is due to hormones. Direct evidence for this view was brought forward by attacking the problem along two different lines of investigation. In the first place it was tried to extract a hormone from buds and cambium and the effect of this extract on cambial activity was tested and in the second place the effect of applying pure growth hormone to the cambium was studied. Both questions have been investigated in the last five years.

AVERY, BURKHOLDER and CREIGHTON (1937) diffused buds and shoots of *Aesculus* and *Malus* on agar plates and afterwards found the agar to contain a growth hormone, the amount being proportional to the amount of xylem formed. ZIMMERMANN (1936), also with the *Avena* technique, showed a growth hormone to be present in growing shoots of *Aesculus*. SÖDING (1937, 1940) found growth hormone in strips from cambium during spring and early summer. That the hormone present in buds is able to initiate the production of new xylem was shown by the present author (1936); an extract from artificially awakened buds of *Fraxinus Ornus* obtained by extraction with chloroform after THIMANN (1934), caused the production of new xylem in shoots of the same tree. The amount present in one bud under favourable conditions is sufficient. SÖDING (1940) reports that even a smaller quantity may be effective (extraction by diffusion in agar). Nevertheless in the present state of research an applying of larger amounts is to be preferred, as they are more sure to act.

Artificially applied heteroauxin or its sodium salt proved to be able to activate the cambium into production of new xylem in herbaceous plants (SNOW 1935) and in trees and shrubs (GOUWENTAK 1935, 1936, SÖDING 1936, BROWN and CORMACK 1937), but only if the hormone is applied to the cut top surface of a decapitated shoot; an uptake from base to top does not take place (GOUWENTAK and MAAS 1940).

Whereas all workers in this field only obtained a local effect of the growth hormone, since the production of new xylem never lasted more than about two inches down below the terminal application, GOUWENTAK and MAAS (1940) report to have seen in early spring 1939 new xylem to develop down the whole length of shoots of all trees tested: *Fraxinus Ornus* L., *Populus nigra* L. and *Salix fragilis* L., shoots of which were treated apically with an amount of 100 γ heteroauxin or its sodium salt after the Laibach lanolin-paste method. Yet the time of application and the concentration of growth hormone were the same as in previous similar work from the same laboratory and from workers in Canada and in Germany; the experiments lasted as long as before. So there must be a general cause for so different a result.

As the whole treatise of the shoots had been the same in 1939 and in our previous work, this cause had to be found in the shoots. Thus we supposed that growth hormone can only induce new xylem when the cambium is not dormant. The extremely cold winter 1939/1940 might have favoured an early rest breaking, hence the shoots might have emerged from rest very early, whereas in previous experiments of GOUWENTAK, SÖDING, and BROWN and CORMACK the shoots were likely to have been still at rest. The fact that also some new xylem is formed in the neighbourhood of the cut surfaces of resting shoots must be ascribed to the action of wounds, a wound evidently having locally a rest breaking effect. A strong evidence of the hypothesis that a wound locally shortens the rest period may be seen in the experiments of BROWN and CORMACK (1937). These authors found new xylem not only near the treated upper surface, but also "in relation to a bridged ring some considerable distance below the point of application of the heteroauxin. The response at the wound was distinct and separate from the response in the region of application of the heteroauxin, since in the intervening distance no cambial activity had occurred".

Thus experiments of our own and historical data readily corresponded to our supposition, that a non-resting condition of the cambium cells is required, before wood can be produced. As the results of our previous investigation were not known before the season was too much advanced to test the supposition experimentally, the work had to be resumed in winter 1940/1941. The hypothesis was tested by applying growth hormone on resting shoots and on shoots that were first treated with a rest breaking substance. At the end of the experiments the cambium of these latter shoots only, showed to have produced wood throughout their whole length.

For this investigation it was necessary to have dormant shoots available during winter. Of course, we could have cut them from the tree, as soon as they were wanted, so long as they were dormant out of doors, but as it was apparent from previous work that an extremely cold winter might have a rather shortening effect on the resting condition of the cambium, shoots were cut in autumn and stored indoors. Part of them were stored

with buds untouched, another part was fully disbudded before storage, for the following reasons. To store only shoots with buds was not advisable because they might start sprouting during storage and thus become useless for the purpose. To store only disbudded shoots was not advisable either, because it was not known beforehand that dormancy is also localised in the cambium itself and that it can be broken by treating disbudded shoots with a rest breaking substance.

The wood produced in our shoots under different conditions regularly shows differences in structure which obviously correlate with inner factors and therefore induce to distinguish several stages of rest of the cambium-cells (p. 660).

Material and Methods.

The material used in these experiments is *Fraxinus Ornus*. At the end of the growing season, in 1939 medio October, in 1940 on the 27 September, about 150 shoots were cut before they had been exposed to night frosts. The shoots were one to three years old and measured 15—23 cm. After the removal of the leaves, they were divided into two groups and put into boxes under moist sand, one group with buds untouched, the other one completely disbudded. The boxes were placed in storage in a dark unheated closet, partly situated underground, where for a long time temperature remained much higher than out of doors. When in December 1939 the temperature decreased to $+9^{\circ}\text{C}$, the boxes were transferred to a room of constant temperature ($+16^{\circ}\text{C}$).

Emergency of rest was caused by treating the shoots with ethylene chlorhydrin. This was performed either by inclosing the terminal bud and as little as possible of the adjacent shoot in a test tube with one drop of a diluted solution and sealing the openings with modeline (DENNY and STANTON 1928), or by exposing entire shoots to the vapour in a glass container. Since both methods proved to be equally good, the latter was always used in later experiments, as it saves time. After a given period, varying from 24—48 hours, the shoots were removed and either immediately treated with hormone or allowed to stand in the greenhouse for some days. The growth hormone used was heteroauxin or its Na-salt.

The growth hormone paste (or water paste for the checks) was applied apically; the removed tips were fixed as a record of the cambium conditions at the beginning of the experiment. Now all buds were carefully removed and the shoots placed with their bases in water in a warm greenhouse, where they were kept for about a month. Regeneration of buds was not frequent; those buds were picked off as soon as they were recognised. Waterpaste checks which regenerate buds much more readily, showed that in this stage they do not affect the results.

At the end of the experiments the shoots were either immediately examined microscopically or cut into pieces and fixed in a mixture of formalin and alcohol 70 %. Microtome sections were made at different

levels, in order to examine to what distance below the treated surface the cambial activity had travelled down.

Experiments and Results.

As in good reason the shoots could be expected to awaken sooner or later without treatment, all experiments were to be finished within as short a time as possible. The experiments began medio Januari 1940; medio February some buds of the non-treated shoots in storage started to develop etiolated shoots and so put a stop to further research. Thus all experiments of early spring 1940 were taken within a month.

Because of the chance that the growth hormone would be only effective if applied after a fixed period after forcing, it was advisable to apply the hormone at different intervals after ethylene chlorhydrin treatment; for these intervals 0, 3, 5 or 7 days were chosen, during which the shoots stood in the same greenhouse where they were placed after the growth hormone treatment, temperature varying between 20—27° C.

The experiments with shoots "stored disbudded" included 46 units. The wounds caused by disbudding had been healed during storage. From one half of the number of shoots the wound at the apical end was opened again before treating with ethylene chlorhydrin, the other half was treated without this operation. In some cases the vapour had a deleterious effect, the number of shoots that died being larger in the operated than in the non-operated shoots, viz. 15 and 8 respectively. So the experiments of this group were carried out with 23 shoots. In each of the experiments one part of the shoots was treated with growth hormone, the other part with waterpaste.

TABLE I.

Forcing treatment from	Time between forcing and growth horm. on	Number of Shoots treated with		Nr. of Exp.	Results of	
		gr. horm.	water		growth hormone	water
19—20 Febr.	0 days	3	3	1 a b	2 shoots: early wood 1 " : large cambial layer	no wood
2—3 Febr.	3 days	3	3	2 a b	2 shoots: transition wood 1 " : early wood	no wood
16—18 Jan.	5 days	4	3	3	All shoots: early wood	no wood
16—18 Jan.	7 days	3	1	4 a b	2 shoots: no wood 1 " : early wood	no wood

Table I shows that the growth hormone is able to activate the cambium in producing new early wood. The wood was formed along the whole

length of the shoots. In most cases this new xylem was early wood of the same kind as is produced under natural conditions. In some cases the new wood was intermediate between early wood and late wood ("transition wood"). Only one single shoot had formed nothing but a thick cambiumlike layer, and two other shoots had not produced any wood at all. A possible explanation of this fact will be given after the statement of all results.

Waterpaste had no effect at all, thus proving that ethylene chlorhydrin is not able to induce cambial activity when applied alone, but only in cooperation with growth hormone.

But for shortness of material each set of experiments should also have included a group of shoots treated with growth hormone without having been forced, thus showing if the material was still dormant. Therefore this check experiment was only made at the end of the season, on the 19 February 1940 with 3 shoots. The shoots proved to be dormant.

The experiments show, moreover, that the cambium itself is dormant and that its dormancy can be broken by direct treating of the shoot without any intermediate action of the buds.

As mentioned above, the same experiments were carried out with shoots stored with buds. Between the ethylene chlorhydrin treatment and the growth hormone supply, these shoots stood in the greenhouse with, of course, buds on. Those which remained there for more than 3 days before growth hormone was applied had to be rejected as they started sprouting.

Therefore only the results of the shoots treated immediately after rest breaking or 3 days afterwards, are stated here. Both experiments took place with 3 shoots treated with growth hormone and 3 and 4 shoots treated with waterpaste. The controls with the cap of waterpaste produced no xylem, whereas in the test shoots new early wood was formed down the whole length, as in the experiments with disbudded shoots. These experiments were made on the 19 and on the 31 January 1940 respectively. On the 8 February, which is a rather advanced date, 4 shoots of this group were tested on dormancy. A month afterwards in one shoot no wood was produced at all, but three shoots had formed more xylem than was expected. The shoots were only 10 cm in length, the apical and basal wound thus being nearer to one another than in any other experiment. Longer shoots were no more in store. Whether in this case the cooperation of the apical and basal wounds had shortened the rest period of the whole shoot or whether the shoots had ceased their resting condition because of the advanced date cannot be decided; in any case it is evident from this experiment that in 1940 it would have been precarious to start experiments with shoots stored with buds about this date. Even the conclusion from the experiment of the 31 January could be doubted. Therefore the experiments here reported were repeated in autumn 1940, the results proving the general conclusions here arrived at, to be correct.

The autumn experiments were, moreover, extended by also testing shoots from the tree in the field. To test these shoots and the stored material on

dormancy five shoots from either of these groups were treated on the 30 September 1940 with growth hormone without preceding rest breaking treatment. After one month all showed the same result as did the unforced shoots in autumn 1937 (GOUWENTAK and MAAS 1940), viz. a small quantity of wound xylem only in the uppermost 2 or 3 millimeter, with vessels not yet as wide as those of normal summerwood.

So at the moment of storage and a month afterwards the shoots did not produce wood down their whole length and thus proved to be the right material for the experiments mentioned. I did not start earlier, from fear of getting into the stage of deep rest, in which buds and perhaps also the cambium do but poorly react on rest breaking treatment.

In the first experiment (which lasted from November 9 till medio December) from each group 4 or 5 shoots were immediately treated with growth hormone, and 4 shoots after ethylene chlorhydrin treatment. Waterpaste checks were left out, as it was now sure enough that ethylene chlorhydrin alone does not cause wood production.

TABLE II.

Shoots	Nr. Exp.	Forced	Nr. Exp.	Not Forced
stored with buds	1 a b	2 shoots: dead 2 " : early wood: 9 and 5 cm	4	3 shoots: wound reaction: rest $\frac{1}{2}$ cm 1 " : late wood 1 cm
stored without buds	2	all shoots dead	5	3 shoots: transition wood: 10 cm 1 " : late wood 9.5 cm
from field	3 a b	2 shoots: whole length early wood 2 " : early wood: few cm	6	3 shoots: wound reaction: rest $\frac{1}{2}$ cm 2 " : late wood: 1 cm

Stored with buds: From the 4 shoots forced two died soon after the rest breaking treatment, the other 2 produced early wood as far as 9 and 5 cm down their length respectively. The cambium of the non-forced shoots formed in 1 unit late wood as far as 1 cm from the paste cap, and had given in 1 case the woundreaction typical for cambium treated at the end of dormancy and described and photographed by GOUWENTAK (1936): This wood is characterized by elements that are often smaller than in late wood, but wider and especially thinner walled than the wound xylem described on top of this page.

Stored without buds. The forced units did not survive after the ethylene chlorhydrin treatment. From non-forced checks 3 shoots formed new xylem intermediate between spring and late wood ("transitionwood"), but not beneath about 10 cm from the upper end of the shoot. One shoot had formed late wood down to 9.5 cm.

Shoots from field. Two of the forced shoots formed spring wood along

the whole length. Another two produced the same kind of wood, but only as far as some few cm from the upper end, whereas a fifth one (not mentioned in the table), damaged by the ethylene chlorhydrin at $2\frac{1}{2}$ cm from top, had formed spring wood only along this distance. In 3 of the non-forced units the cambium was completely resting, while in one of them a small quantity of late wood had been formed in the topmost first cm.

Although the cambium of forced shoots produced early wood throughout the whole length, most shoots were apparently in a stage of rest in which emergency can scarcely be hastened. This is emphasized by the reaction of most shoots in the non-forced group, as the shoots "stored with buds" and "from field" almost made no wood at all. The non-forced units stored without buds made more wood than was expected from non-forced shoots. As, however, in a second experiment, running from the 4 December till the 10 January all shoots — forced and non-forced — made springwood down the whole length, these shoots obviously were already about to emerge from rest before medio December. The early rest breaking must have been caused by too cold storage. Due to war-circumstances the storage room could not be kept at the same high temperature as in previous years.

The fact that the structure and the quantity of wood formed by heteroauxin in dormant shoots differ so much, leads us to distinguish different stages of cambial rest. We have chosen the same names as are used for bud rest, without, however, pretending that cambium rest stages and rest stages of buds must coincide in time.

- I. A stage of preliminary rest ¹⁾ (Vorruhe JOST, JOHANNSEN 1910) attained during late summer.
- II. A stage of deep rest ¹⁾ (Hauptruhe JOST, Mittelruhe JOHANNSEN).
Woodelements not yet so wide as those of late wood, in only the upper 2 or 3 millimeters (GOUWENTAK and MAAS 1940, GOUWENTAK this paper) or only a layer of undifferentiated cambial cells (GOUWENTAK and HELLINGA 1935, GOUWENTAK 1936).
- III. A stage of afterrest

}	Phase 1: wound reaction followed by some late wood and rest; or directly by rest (this paper Table II, Exp. 4 and 6. Phase 2: early wood or transition wood some few centimeter down the length of the shoot (SÖDING's Exp. 1936, GOUWENTAK's 1936, BROWN and CORMACK's 1937, this paper Table II Exp. 5. Phase 3: wood throughout the whole length of the shoot (GOUWENTAK and MAAS' Exp. 1940, this paper Exp. early spring 1941).
---	--

¹⁾ English terminology after MAXIMOV, Plant Physiology ed. by HARVEY and MURNEEK, 1938.

Phase 1 and 2 of stage III are identical with the so-called "Nachruhe" of JOST (in BENECKE-JOST 1923) and JOHANNSEN (1906) in buds. During these phases heteroauxin only activates the cambium after a preceding rest breaking treatment. Phase 3 is identical with the "unfreiwillige Ruhe" of MOLISCH (1909) (enforced rest of HARVEY and MURNEEK, vide note 1, p. 660). JOST and JOHANNSEN call this stage the end of the "Nachruhe", in which only unfavourable external conditions prevent growth. During phase 3 the cambium starts growth if growth hormone is supplied and the environmental conditions are favourable.

As to the different types of xylem produced after a rest breaking treatment, stated in Table I and II, the suggestion is that not all shoots were in the same condition of rest. The shoots of experiment II: 3a and I: 1a, 2b, 3, 4b apparently were in phase 1 or 2 of the afterrest before they were treated with the ethylene chlorhydrin. Those of experiment II: 1b, 3b and I: 1b, 2a, 4a probably were in deep rest. This suggestion remains to be tested next winter.

The sections of the rest stages of the cambium are chosen so, that rest breaking is also possible during the stage of deep rest. Thus I agree with JOHANNSEN in his classification of 1906, where he terms deep rest as the stage in which emergency, though not impossible, is very difficult; afterwards (WARMING-JOHANNSEN 1909) he changed the meaning of the term into the stage from which artificial hastening of emergency is impossible, but according to WEBER (1916) a deep rest in the latter sense does not exist at all.

In recent literature heteroauxin is sometimes considered a rest breaking substance (AMLONG and NAUNDORF 1938, BENNETT and SKOOG 1938, VEGIS 1937). A review, however, of the results of AMLONG and NAUNDORF demonstrates that although the one control plant present started flowering much later than the hormone-treated plants, its leaf buds were unfolded at about the same time as those of the treated plants. So not a premature unfolding but at the utmost a premature opening of the flowers took place. The preliminary experiments of BENNETT and SKOOG were not made on a large scale and the effect of heteroauxin was only small. In the experiments of VEGIS many turions of *Stratiotes* were used and the author obtained the striking effect that the turions began to sprout within 24 hours when put into a diluted heteroauxin solution, whereas the controls in water remained dormant. Now, perhaps, VEGIS experimented during the period of enforced rest. If so, the effect of the heteroauxin may have been due to a want of growth hormone and thus the turions could start growth as soon as the hormone was available. But even if heteroauxin should prove to be a rest breaking substance for buds and turions, it does not effect the conclusions arrived at in this paper. In cambium cells in different stages of rest the effect of ethylene chlorhydrin or heteroauxin alone and of the cooperation of both is so strikingly different, that the

action of the heteroauxin on cambial cells is not that of a rest breaking treatment.

As to the nature of the effect of ethylene chlorhydrin and other rest breaking means on dormant protoplasts little is known. KESSLER (1935) and KESSLER and RUHLAND (1938) ascribe the rest breaking effect to a decreased hydration of the protoplasts as in active protoplasts the viscosity proved to be lower than in resting cells. If so, heteroauxin and, perhaps, natural growth hormones can only induce cambial activity in the dehydrated condition of cambium cells.

Summary.

Heteroauxin, or its Na salt, can only activate the cambium to produce new early wood throughout the whole length of shoots if these shoots are in a non-resting condition. This condition is artificially hastened by an ethylene chlorhydrin treatment. The growth hormone may be supplied directly or after some days. Ethylene chlorhydrin treatment alone does not activate the cambium. The resting cambial cells can be roused into renewed growth without the interference of buds.

Heteroauxin may also activate resting cambium to produce wood, but only in the direct neighbourhood of wounds, the wound having locally a rest breaking effect. In this case the kind of wood produced varies from undifferentiated cells to real springwood. This is explained by distinguishing different stages of rest in the cambium cells (scheme on p. 660).

LITERATURE.

- AMLONG, H. U. und G. NAUNDORF, *Planta* **12**, 116—120 (1938).
 AVERY, G. S., P. R. BURKHOLDER and H. B. CREIGHTON, *Am. J. of Bot.* **24**, 51—58 (1937).
 BENECKE-JOST, *Vorlesungen ü. Pfl. Physiologie*, Bd. II (1923).
 BENNETT, J. P. and F. SKOOG, *Plant Physiology* **13**, 219—226 (1938).
 BROWN, A. B. and R. G. H. CORMACK, *Can. J. of Res.* **C15**, 433—441 (1937).
 COSTER, C., *Ann. d. Jard. bot. de Buitenzorg* **37**, 49—160; **38**, 1—114 (1927).
 DENNY, F. E. and N. E. STANTON, *Am. J. of Bot.* **15**, 337—344 (1928).
 GOUWENTAK, C. A. und G. HELLINGA, *Meded. Landbouwhoogeschool Wageningen*, **39** (Verh. 6), 3—12 (1935).
 GOUWENTAK, C. A., *Meded. Landbouwhoogeschool Wageningen*, **40** (Verh. 3), 3—23 (1936).
 GOUWENTAK, C. A. und A. L. MAAS, *Meded. Landbouwhoogeschool Wageningen*, **44** (Verh. 1), 3—16 (1940).
 JOHANNSEN, W., *Das Aetherverfahren beim Fröhrtreiben* (1906).
 ——— in *Warming-Johannsen, Lehrb. d. allgem. Botanik* (1909).
 JOST, L., *Bot. Ztg.* **49**, 485 ff. (1891).
 ———, *Bot. Ztg.* **51**, 89—138 (1893).
 KESSLER, W., *Planta* **24**, 312—352 (1935).
 KESSLER, W. und W. RUHLAND, *Planta*, **28**, 159—204 (1938).
 MOLISCH, H., *Das Warmbad als Mittel zum Treiben der Pflanzen* (1909).
 SNOW, R., *The New Phytologist*, **32**, 288—295 (1933).
 ———, *The New Phytologist*, **34**, 347—360 (1935).

- SÖDING, H., Ber. d. d. bot. Ges., **54**, 291—304 (1936).
 ———, Jahrb. f. wiss. Bot., **84**, 639—670 (1937).
 ———, Ztschr. f. Bot., **36**, 113—141 (1940).
 THIMANN, K. V., Journ. of Gen. Physiol. **18**, 23—34 (1934).
 VEGIS, A., Bull. d. l. Soc. de Biologie de Lettonie, **7**, 87—102 (1937).
 WEBER, F., Ber. d. d. bot. Ges., **34**, 7—13 (1916).
 ZIMMERMANN, W. A., Ztschr. f. Bot. **30**, 209—252 (1936).

Laboratorium voor Plantkunde.

Wageningen, April 1941.

Medicine. — *Microscopic investigation of the brain in a case of cranio-synostosis.* By CORNELIA DE LANGE. (Communicated by Prof. B. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

This congenital anomaly was found in a man B who died in 1940, 68 years old of heartfailure. The post-mortem in the Pathological Institute of Prof. H. T. DEELMAN revealed a cicatrix myocardii, a thrombosis of the left coronar artery and partly of the right with sclerosis, pericarditis fibrinosa, kidneys with a large number of small cysts and multiple infarctus of the lungs.

Over a certain period of the patient's life there had been glycosuria, but during his last stay in hospital no sugar was found. At birth the anomaly of his skull was commented upon by the family doctor. The delivery was reported as difficult, but instrumental aid had not been necessary. The patient's only brother has a normal shape of head. B had a good intellect and passed through grammarschool in the ordinary way. He became a mason and married. His only child, a daughter, has a normal skull. B never suffered from headaches, fits of unconsciousness, attacks of sickness, diplopia or from a sense of oppression in the head. There never were any symptoms of acholuric icterus. In 1926 deafness of the left middle and internal ear was stated. Eighteen years before his death he suffered from a mild commotio cerebri, for which he was admitted to hospital. From February 12th 1940 till May 11th 1940 he stayed for heartdisease in the Wilhelmina-Gasthuis (Pavilion II) in Amsterdam. He was readmitted on June 6th 1940 and death occurred twelve days later.

I am indebted to the physicians in charge of the patient for the following status.

The patient's skull (Fig. 1 a 2) presents a high forehead and rises to an apex at the bregma. There is a pronounced asymmetry of the forehead, the left side rising higher than the right. Above the orbits a depression is felt, but the superciliary arches are prominent. The right orbit is larger than the left and of oval shape. There is no exophthalmus. On the right the temporal region of the skull protrudes. From the summit the posterior portion of the head slopes almost suddenly back to the pointed occiput. Over the head a ridge is felt in an antero-posterior direction.

Measurements of the skull.

length	20.2	cm
breadth	14.6	„
cephalic index	71.17	„

distantia subnaso-bregmatica	22.6	cm
distantia biparietalis	13.2	„
distantia bifrontalis (just above the orbits)	11.2	„
distance from the occiput to the anterior fontanelle	20.1	„

From its appearance and these measurements a diagnosis has been made in the Clinic of: asymmetric, scaphocephalic skull.

Radiographic examination revealed a high pointed head with a straight forehead and a prolate occiput. The basis of the skull proves shortened and the orbital roofs are irregularly formed. The site of the anterior fontanelle is very thin and vascular. There are some so-called digital impressions, but they are not very pronounced. The processus clinoides are of different length. The sella turcica is shallow. The metopic suture (sutura coronaria) is not visible, nor is the sagittal one; only the lambdoid remains. On the antero-posterior radiogram the asymmetry is striking, the sphenoid bone showing on the right a steeper position than on the left and also the right orbit being larger than the left. On both sides the sphenoid reaches on its mesial side farther down than usual. The bones of the skull show a normal thickness.

Examination of the eyes. The left eyebrow drops a little. The ocular movements are intact. There is strabismus convergens, but the patient wears positive glasses. Visus L $\frac{1}{3}$. R $\frac{1}{2}$. Fields of vision grossly determined prove normal. Bilateral there is a slight paleness of the optic disks. Optokinetic nystagmus normal; normal rotatory nystagmus in extreme positions. Colourperception on the right eye better than on the left.

The patient's deafness has already been mentioned. The cranial nerves are normal; so are the motility and the sensibility all over the body, the reflexes and the co-ordination movements.

Hands and feet show no deformities.

The post-mortem did not reveal any *congenital* anomalies, save there being an incomplete fourth lobe of the right lung and a malformation of the arteriae communicantes cerebri.

At the autopsy the following measurements of the skull were taken: circumference 55 cm distantia bitemporalis 13.5, biparietalis 11.5, fronto-occipitalis 20 cm. The soft parts were without peculiarities. The calvarium has a scaphoid shape, is asymmetric, the bones have their normal thickness. The interior fossae anteriores, mediae and posteriores are much deeper than usual, particularly the latter. Otherwise the base of the skull does not present any anomalies. The foramen magnum has been displaced to the left thereby enlarging the right medial and posterior fossa. This asymmetry holds also true for the brain itself as will be described later on. The dura mater, the bloodsinus and vessels are normal with the exception of there being a small aneurysma of the right arteria cerebri media. Weight of the brain 1500 grams. (Fig. 3 by courtesy of Prof. H. T. DEELMAN).

The pituitary body has its normal form and dimensions. The accessory sinus are well formed.

The brain, spinal cord, pituitary body and calvarium were presented by Prof. DEELMAN to the neurological laboratory of Prof. B. BROUWER.

Macroscopic description of the brain.

On the convexity there is a chronic leptomeningitis most pronounced on the mesial side of the frontal lobes. Some small aneurysmata are discovered. The total shape of the brain has altered (Fig. 4), it has a lengthened, scaphoid form (length 20 cm, breadth 14 cm). On its dorsal face the temporo-occipital region of the right hemisphere is larger than the left. On the ventral face on the contrary the left part proves larger than the right. This may be explained by a torsion of the brain which also shows on its base. It looks as if by a bend in the middle-line the pons Varoli has been displaced slightly to the left in a postero-anterior sense. The same holds true but in a minor degree for the tuber cinereum. The stalk of the pituitary body is directed to the right. The chiasma deviates somewhat to the left, but the brainparts anterior to it are again directed to the right. The right corpus mamillare is somewhat larger than the left. There is a minor dilatation of the infundibulum.

Left hemisphere. The sulcus Rolando runs its normal course and indents on the mesial wall. The sulcus praecentralis is not interrupted. The sulcus frontalis superior is distinct, so is the inferior; the sulci intraparietalis and temporalis medius can be traced. The pars triangularis is distinctly visible. The frontal pole shows a surplus of convolutions on its lateral and anterior part, but no real mikrogyria exists. The bulbus and tractus olfactorius are normal, the latter being imbedded in the gyrus rectus. In the middle of frontal pole on its basal side a pit of a certain depth is seen (length 4 cm, breadth $2\frac{1}{2}$ cm).

Right hemisphere. Here the sulcus Rolando does not indent on the mesial wall. Over the base of the frontal lobe a slight polygyria is present, but there is no real microgyria. Here also a pit is seen on same spot as on the other side, but it is more shallow. The rest of the convolutions are normal, so are the bulbus and tractus olfactorius.

The brainstem and cerebellum are cut off through the pedes pedunculi; there is no widening of the Sylvian duct. The brain is cut in a fronto-vertical direction through the commissura anterior. There is doubtless a dilatation of the lateral ventricles, the right being larger than the left. The septum pellucidum proves a thin membrane, the corpus callosum is also meagre. The anterior part of the striate body looks normal. A second cut is made through the splenium; here also the ventricles show markedly dilated, the right more so than the left. The splenium is of a slight build.

The cerebellum does not present any anomalies, both parts are equal. On sagittal sectioning one sees a normal shaped dentate nucleus. The spinal cord also has a normal appearance.

Technique. Of the following convolutions parts are taken, imbedded in

celloidin, stained after NISSL and with hematoxylin-eosin: right frontal pole covered with pia, left frontal pole (basal part), "pit" in the left frontal lobe, gyrus frontalis primus near the middle-line, gyrus frontalis secundus and gyrus frontalis primus dorsally, all of them on the left side. Right and left gyrus centralis anterior (centre for the arm), left gyrus centralis posterior, lobus parietalis superior on the left side with pia, gyrus temporalis superior with and without pia, gyrus occipito-temporalis, gyrus occipitalis primus, upper and lower lip of the calcarine, all of them on the left.

Part of the chorioid plexus of the left lateral ventricle is treated in the same way.

From the cerebellum parts are taken of both hemispheres and of the vermis; from the spinal cord pieces of the cervical, the thoracal and sacro-lumbar region. Different parts of the cord, of the right cerebellar hemisphere and the nucleus dentatus are more-over treated after WEIGERT-PAL and VAN GIESON's methods.

After all these parts have been removed, the left hemisphere is put into MÜLLER's solution, imbedded in celloidin and cut in serial sections of $35\ \mu$. 1 : 5, stained 1 : 10 after WEIGERT-PAL and VAN GIESON's methods. The right hemisphere is imbedded in celloidin for staining after NISSL and with hematoxylin-eosin in the same way as stated above but the sections measuring $25\ \mu$.

The brainstem is treated in the same way as the left hemisphere, so are the optic nerves.

The following special techniques have been employed: BIELSCHOWSKY's method for left lobus parietalis superior, the "pit" in the left frontal lobe, right neocerebellum, left gyrus centralis posterior (centre for the leg), left gyrus occipitalis primus, left gyrus temporalis primus, cervical, thoracal and sacro-lumbar cord. HOLZER's method for gyrus praecentralis, frontalis superior and temporalis superior, all of them on the left side, vermis, right cerebellar hemisphere, cervical, thoracal and sacro-lumbar cord. Staining after PENFIELD for left gyrus centralis anterior (centre for the arm) left gyrus temporalis primus, right cerebellar hemisphere and cervical, thoracal and sacro-lumbar cord.

Microscopic investigation.

In the spinal cord no anomalies were present with the exception that in the thoracal part the lumen of the central canal was very narrow and in some of the sections of the cervical part the same was seen. In a more cranial cervical region the canal proved slightly dilated. In the cerebellum nothing abnormal could be found and the same may be said of the brainstem. The study of the small parts removed for different techniques and of the large sections of the hemispheres did not reveal any peculiarities. All was within range of the slight individual variations, which one encounters in studying the brains of various individuals.

Stress may be laid upon the fact that the regio hypothalamica proved

quite normal. The same was the case with the pituitary body, which was examined in sagittal sections stained with hematoxylineosin.

In the striate bodies no anomalies could be detected, dorsally some conglomerations of glial cells could be found. The thalami optici presented their normal aspect; in the corpora mamillaria the pars magno- and the pars parvicellularis showed distinctly. The "pits" in the frontal poles were examined with great care, but they did not reveal any structural anomalies. Histological differences between the right and the left hemisphere could not be detected. In the sections stained after WEIGERT-PAL the semi-oval centre shows some pale spots, but microscopic examination does not reveal a degeneration of the myelin-sheaths. The HOLZER technique made apparent a slight degree of bordergliosis in some of the cerebral convolutions. The plexus chorioides of the lateral ventricles was seen to contain corpora arenacea with concentric layers, also structureless conglomerations of chalk. One sees also a calcification and a hyalinisation of the walls of the bloodvessels. The epiphysis contains sandy deposits, which facts are in accordance with the patient's age.

Taken all in all one may say, that the ample histological investigation of the brain which has been performed in this case, has shown not only a complete absence of congenital deformities, but also an admirable accommodation of the brain during its growth and development to unfavorable circumstances, id est to the hindrance of its expansion, provided by an abnormal skull with synostosis. We must come back to this point in discussing the possibility of surgical intervention in cases of congenital craniostenosis.

What name must be applied to the deformity of the skull in our case? It cannot be oxycephaly or scaphocephaly for "in true oxycephaly where the skull bones meet, they fuse" (GREIG¹), the skull is sutureless. After IDA MANN²) oxycephaly is a primary synostosis of the transverse sutures (lambdoid, metopic and basal) and scaphocephaly is the primary fusion of the sagittal suture. Moreover both are a symmetrical deformity. In the patient B the shape of the head showed asymmetry. In oxycephaly the accessory sinus are flattened and shallow; in B they were normal and moreover the lateral ventricles were dilated. Plagiocephaly is caused by local synostosis of different sutures. False oxycephaly is an example of localised premature synostosis occasionally congenital. True oxycephaly and scaphocephaly are congenital and may be hereditary. False oxycephaly is a fortuitous production and is never hereditary (GREIG). So it may be the wisest course to adopt in our case the term of congenital craniostosis.

In the patient B clinical symptoms of a raised brainpressure were almost

¹) DAVID M. GREIG. Edinburgh med. Journal. N.S. Vol. XXXIII, p. 189, 280, 357 (1926).

²) IDA MANN. Transactions of the Ophth. Soc. of the United Kingdom. Vol. LV (1935).

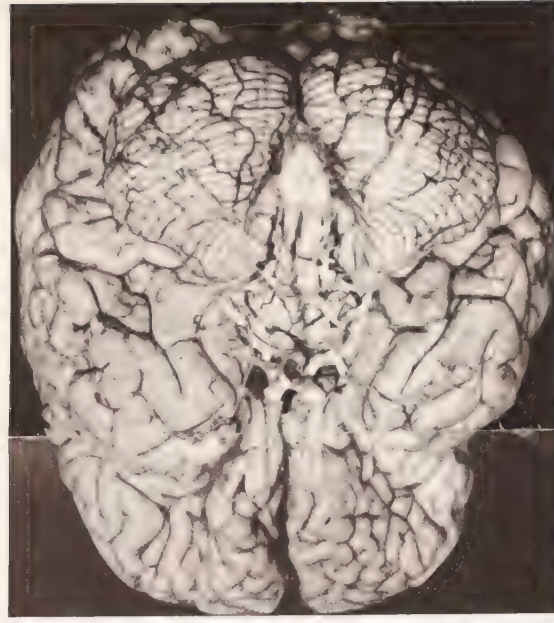


Fig. 1

Photo by courtesy of the internal Clinic

Fig. 2

Photo by courtesy of the internal Clinic



lacking; there was only a slight paleness of the optic disks, that need not be caused by it. The radiogram showed a somewhat shallow sella turcica and some minor digital impressions. The accessory sinus were not flattened or shallow, the bones of the skull had their normal thickness, only the site of the anterior fontanelle had thinned. The post mortem has corroborated these facts. The "Anlage" of the brain was quite normal; there was no vitium primae formationis. Nor were there histological alterations due to a raised brainpressure. The cerebrum had accommodated itself to its narrow surroundings.

In most cases of craniosynostosis however the misproportion between the narrow skull and the in youth rapidly expanding brain, gives rise to clinical symptoms, of which the menace of blindness lies in the centre.

A surgical treatment of craniostenosis has repeatedly been performed, as Professor B. BROUWER ¹⁾ has recently exposed in a clinical lecture. It need not be said that operative aid can only have a palliative effect, if not only the skull, but also the brain itself is misshapen or if the raised pressure has caused irreparable alterations of the tissues. I was unable to discover in literature a histological report of the brain in a case of craniosynostosis. Macroscopic details are also extremely scarce; only WHEATON ²⁾ mentions that in two cases the occipital parts of the brain were markedly underdeveloped.

In my opinion the value of the investigation of the brain in the patient B lies in the fact that craniostenosis may occur in cases, where the "Anlage" of the brain is quite normal and that the cerebrum may accommodate itself in a high measure to its narrow surroundings without the tissues undergoing irreparable damage. In general the clinical symptoms of raised brainpressure are already present in the early years and in those cases operation should not be postponed, but performed before the child has reached the age of four years.

So the congenital craniostenosis comes within the range of interest of the whole medical profession; it has ceased to be a mere curiosity.

¹⁾ B. BROUWER. Over Oxycephalie. Nederl. Tijdschrift v. Geneeskunde, **84**, 501 (1940).

²⁾ S. W. WHEATON. Transactions of the Pathol. Society of London, **45**, 238 (1894).

Hormonology. — *Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stuten-serum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren.* I. Von Dr. F. C. VAN DER KAAJ und Dr. L. P. H. J. DE VINK. (Communicated by Prof. G. KREDIET.)

(Aus der Veterinären Geburtshilflichen und Gynäkologischen Klinik der Reichsuniversität zu Utrecht (Dir. Prof. Dr. F. C. VAN DER KAAJ) und der Universitäts-Frauenklinik zu Amsterdam (Dir. Prof. M. A. VAN BOUWDIJK BASTIAANSE.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Nach der Entdeckung des Einflusses des hypophysen Vorderlappens auf die Funktion des Ovariums durch ZONDEK und SMITH im Jahre 1926 haben viele Forscher sich mit dem Problem betreffs der Wirkung der gonadotropen Hormone befasst. Anfänglich versuchte man durch Einbettung oder durch orale Verabreichung von Hypophysen oder deren Extrakte die Wirkung der Ovaria zu stimulieren. Im Laufe der Untersuchungen wurde festgestellt, dass im Urin schwangerer Frauen ein Hormon mit gonadotroper Wirkung gefunden wurde, welches vom Epithel der Chorionflocke (Chorionic gonadotrophin) herrührte. Im Jahre 1930 stellten COLE und HART das Vorhandensein eines Hormons mit gonadotroper Wirkung im Blut schwangerer Stuten fest. So können wir heute drei Arten gonadotropen Hormons unterscheiden, nämlich

1. das gonadotrope, aus der Hypophyse selbst gewonnene und meist mit einer thyreotropen Komponente verbundenen Hormons;
2. das aus dem Urin schwangerer Frauen gewonnene gonadotrope Hormon;
3. das aus dem Serum von schwangeren Stuten bereitete gonadotrope Hormon.

Angesichts der Tatsache, dass die aus den Hypophysen bereiteten gonadotropen Hormone sehr kostspielig für die klinische Verwendung waren, versuchte man mit dem unter 2 angeführten Hormon (Handelsname Pregnyl, Prolan) das gleiche Ergebnis zu erzielen und die Ovaria zu aktivieren. Doch dies hatte nur teilweisen Erfolg, denn bei den verschiedenen Versuchstieren wurde zwar eine Follikelvergrößerung festgestellt, aber zur Ovulation und Gravidität kam es nicht. Beim Weib wies das Ovarium nach Behandlung mit Pregnyl sogar regressive Veränderung statt einer Reifung der Follikel auf. Mit beiden Hände wurde der Befund von COLE und HART ergriffen, um auf experimentellem Wege zu untersuchen, ob dieses Hormon in seiner Wirkung näher bei dem aus der Hypophyse stehe als obengenanntes. Bereits haben mehrere Autoren (HARTMANN,

COLE, DAVIS und HUMBER) günstige Ergebnisse berichtet, namentlich mit den kleineren Laboratoriumtieren. Neueren Datums ist die Mitteilung von HARTMANN, dass es ihm gelungen sei, bei einem Hund nach der Behandlung mit obengenanntem gonadotropen Hormon eine Gravidität festzustellen.

Wir hatten vor einiger Zeit das Vorrecht, ebenso wie wir dies mit Pregnyl taten, die Wirksamkeit des unter 3 genannten Hormons, das den Handelsnamen Gestyl (Organon A. G., Oss) trägt, bei grösseren und kleineren Haustieren in verschiedenen Versuchen zu prüfen. Hierzu wurden junge und erwachsene Hunde, welche im Anöstrus sich befanden, mit genanntem Gestyl behandelt. Fast alle Injektionen wurden intramuskulär erteilt. Nur eines der jungen Tiere erhielt seine Einspritzung intravenös. Auch wurde die Wirkung dieses gonadotropen Hormons bei einer Herde Schafe, einigen Rindern und einem Schwein untersucht. Mit unsern Injektionen, sowie der eingeschlagenen Technik arbeiteten wir nach demselben Schema wie seinerzeit mit den Pregnyleinspritzungen.

Was den normalen Zyklus des Hundes, der zu den diöstrischen Tieren gehört, sowie die während dieses Zyklus gefundenen histologischen Einzelheiten angeht, so verweisen wir nach einer früheren Mitteilung, in der unsere Befunde ausführlich angegeben sind (Archiv für Gynäkologie Bd. 169).

Die eingespritzten Gestylmengen variierten zwischen 120 R. E. und 1000 R. E. Dieselben wurden praktischerweise alle mit einer oder zwei Injektionen den Versuchstieren verabreicht. Bei der ersten Gruppe Hunde wurden allein die klinischen Einzelheiten gesammelt, während bei einer andern Serie Tiere das linke Ovarium und das linke Uterushorn für die Injektion, das rechte Ovarium und das rechte Uterushorn einige Tage nach der Einspritzung entfernt wurden. Die von uns gefundenen Ergebnisse werden wir nacheinander besprechen.

Gestylverabreichung bei jungen Hunden.

Von 3 jungen Hunden im Alter von 33 Tagen wurden zwei Tiere intramuskulär, der dritte intravenös eingespritzt. Die beiden ersten Tiere erhielten 120 R. E., während dem dritten Tiere 160 R. E. verabreicht wurden. Bei keinem der Hunde wurde das geringste klinische Brunstsymptom beobachtet. Während bei einem Kontrolltier von gleicher Altersstufe ein infantiles Ovarium gefunden wurde, erhielten wir den Eindruck, dass die jungen Tiere auf das Gestyl reagiert hatten. Die primären Follikel wiesen ein leichtes Anwachsen auf. An einigen Stellen waren degenerierte Eizellen in den Follikeln vorhanden. Bei dem intravenös eingespritzten Tier fanden wir ebenfalls eine leichte Reaktion der verschiedenen primären Follikel. Das Stroma erwies sich an verschiedenen Stellen als losmaschiger, während eine Vergrösserung junger Bindegewebelemente festgestellt wurde. Im Uterus eines des oben genannten intramuskulär eingespritzten Tiere erwies

TABELLE I.

Hund No.	Alter in Jahren	Gew. in kg.	Dat. der Einspritzung	Total eingespritzte R.E. Menge	Klinischer Verlauf.	Klin. Ergebnisse.
166	4	16.5	28.7.39	100	Am 31.7.'39 leichte Schwellung der Vulva, dauert bis 9.8. Vaginalwand von 28.7.—31.7. anfänglich rosa, darauf bleich bis 9.8. Am 10.8. rosarot. Am 12.7. ist etwas gelber Ausfluss, der am 2.8. röter wird. Darnach am 4.8. heller ist. Am 9.8. ist nur wenig Libido sexualis vorhanden. Coitus nicht gestattet.	Sehr schwacher Oestrus. Libido —. Coitus —. Keine Gravidität.
119	4	12.5	5.5.39	120	7.5.'39—24.5. leichte Schwellung der Vulva. Vom 9.5.—13.5. bleiche oedematöse Vaginalwand. 10.5.—15.5. roter Ausfluss aus der Vagina, der allmählich verschwindet. 16.5.—18.5. heller, schleimiger Ausfluss. Libido sexualis positiv nach 15.5.—24.5. Coitus am 17., 20. und 22.5.'39 gestattet. Am 5.6.'39 Versuchslaparotomie. Keine Gravidität.	Vollständiges Bild eines Oestrus. Libido positiv. Coitus +. Keine Gravidität.
167	1½	15.5	28.7.39	200	Am 1.8. etwas Schwellung der Vulva, die am 3.8. deutlich wird und am 7.8. grösser wird, sodass am 9.8. geschwollene Vulva vorhanden ist. Vaginalwand anfänglich rosa, wird am 6.8. oedematös und am 9.8. bleich rosa, am 17.8. noch etwas injiziert. Der Ausfluss ist am 28.7. etwas gelb. Am 1.8. wird er blutig gelb, am 7.8. hämorrhagisch. Am 12.8. wird er wieder heller. Am 17.8. kein Ausfluss mehr. Der Libido sexualis ist vom 3.8. an für Rüde und Hündin positiv. Am 8.9., 11., 12., 13. und 16.8. wird Coitus gestattet.	Oestrus positiv. Libido positiv. Coitus + +. Keine Gravidität.
157	3	20	5.5.39	200	Cyclus nicht bekannt. Ende April starke Vulvaschwellung gehabt, Vaginalwand rot, hellroter Ausfluss. Libido sexualis positiv. Coitus einige Male gestattet. Darauf Einspritzung, Vulvaschwellung bleich bis 12.5. stark. Vaginalwand wurde 6.5.'40 bleicher, der rote Ausfluss wurde am 7.5.—10.5. stark rot gefärbt, am 12.5.'40 einige Tage schleimig, nach 16.5 kein Ausfluss mehr. Libido sexualis war am 5.—11.5.'39 stark positiv, während am 7., 8., 9, 10.5 Coitus gestattet wurde. Am 5.6.'39 Versuchslaparotomie, keine Gravidität.	Ein in Oestrus befindlicher Hund wurde klinisch aktiviert nach 200 R.E. Libido + +. Coitus + +. Keine Gravidität.
161	1½	16	5.5.39	280	Am 8.5. Schwellung Vulva, am 11.5. stärker, welche bis 22.5. bleibt. Vaginalwand am 11.5. oedematös, am 12.5. rot, darauf bleicher bis zum 21.5. Ausfluss am 8.5. schleimig, vom 11.5.—17.5. blutig, darauf schleimig bis 25.5. Libido sexualis vom 11.—21.5. von Rüde positiv, von Hündin mässig. Coitus nicht gestattet.	Beginnender Oestrus. Libido mässig. Coitus —.
161	1½	16	28.7.39	300	Vom 2.8. Schwellung Vulva, stärker bis zum 5.8., darauf zurückgehend bis zum 11.8. Am 16.8.'39 wird Schwellung wieder deutlich. Vaginalwand vom 28.7.—1.8. rot, darauf bis 6.8. blassrot, wird bleicher und bleibt bis zum 21.8. Am 1.8. ist der Ausfluss rot, der abwechselnd am 5., 6.—8. gelb ist, darauf gelbrot wird. Am 10.8. roter Ausfluss bis zum 21.8. Libido sexualis ist von Rüde vom 1.—7.8. positiv, auch für Hündin. Am 17., 19. und 21.8. für beide Geschlechter positiv. Nur einmal am 28.8.'40 wurde Coitus gestattet. Am 25.10.'39 wurden 5 normale Junge geboren.	Oestrus positiv. Libido positiv. Coitus nicht gestattet, erst später in der 2. Hälfte. Am 25.10. fünf normale Junge.

sich das Stroma der Schleimhaut als losmaschiger als das des Kontrolltieres. Der Uterus des intravenös eingespritzten Hundes wies eine deutliche Vergrösserung auf, während der Zylinderepithelüberzug erhöht war und stellenweise Krypten aufwies. Das Stroma der Schleimhaut war losmaschig und enthielt eine gesteigerte Anzahl Drüsen, deren Epithelüberzug schön zylindrisch war. Die Zellkerne waren basal geordnet.

Aus obigen Ergebnissen glauben wir feststellen zu können, dass eine intravenöse Verabreichung von Gestyl wirksamer ist als diejenige, welche intramuskulär gegeben wird. Auch glauben wir feststellen zu dürfen, dass der primäre Follikel im Zusammenhang mit der gefundenen Veränderung im Ovarium, aber vor allem in der Schleimhaut des Uterus, auf Gestyl reagiert.

Gestylverabreichung bei erwachsenen Hunden.

Sechs Tieren, wovon einem zweimal, wurde eine Gestylmenge von 100—300 R. E. verabreicht. Wie in der 1. Tabelle angegeben wurde, wies das vier Jahre alte Tier (Hd. 166), der am 28. 7. 39 mit 100 R. E. eingespritzt worden war, nur eine leichte Schwellung der Vulva auf sowie eine 8 Tage später auftretende graue Ausscheidung aus der Vulva. Das Gesamtbild war das einer schwachen Brunst, der Libido sexualis war jedoch gegenüber einem Rüden oder der des letzteren gegenüber der Hündin negativ. Hund 119, der mit 120 R. E. eingespritzt wurde, wies dagegen klinische Symptome einer Brunst auf. Vier Tage nach der Injektion trat ein Oedem der Vulva auf, während nach 5 Tagen ein roter Ausfluss ersichtlich war, der im Laufe einiger Tage einer schleimigen Ausscheidung Platz machte. Der Libido sexualis war 10 Tage nach der Injektion positiv, während nach 12, 15 und 17 Tagen ein Coitus gestattet wurde. Gleiche Ergebnisse wiesen auch die andern Tiere auf, die sämtlich mit grösseren Mengen R. E. Gestyl behandelt wurden. Ein Hund erhielt seine Einspritzung (157) in dem Augenblick, wo er klinisch am Brunststadium vorbei war. Hier sahen wir nach einigen Tagen wieder eine vollständige Brunst mit Vulvaschwellung, oedematöser Vaginalwand und roter Ausscheidung zurückkehren. Auch wurde 5 × ein Coitus gestattet, doch bei Versuchslaparotomie, einen Monat nach der Injektion, konnte keine Gravidität festgestellt werden. Hund 161 wurde zweimal, mit einer Zwischenzeit von wenigen Monaten, behandelt. Nach der ersten Injektion war die klinische Brunst zwar vorhanden, aber nicht in starkem Masse. Der Libido war mässig, während kein Coitus stattfand. Nach vier Wochen war das ganze Bild zur Ruhe gekommen. Die zweite Einspritzung fand elf Wochen nach der ersten statt. Nach 3 Tagen begann das Tier mit einer leichten Schwellung der Vulva zu reagieren, welche am 11. 8. 39 zurückging. Die Ausscheidung war am 2. 8. stark hämorrhagisch, während der Libido sexualis vom 1. bis 7. 8. gegenüber beiden Tieren positiv war. Ein Coitus wurde jedoch nicht gestattet. Anfänglich dachten wir, dass hiermit der klinische Verlauf ein Ende nähme, doch nach einigen Tagen (16. 8.) wurde die Schwellung der Vulva wieder

TABELLE II. Tiergruppe, wo später Operation vorgenommen wurde.

Hund No.	Alter in Jahren	Gew. in kg.	Injektionsdatum	Injizierte Flüssigkeitsmenge	Klinischer Verlauf.	Klin. Ergebnisse
163 16/5-'39 geworfen	2	13	30.6.39	200 R.E.	2.—6.7. leichte Schwellung der Vulva. Vaginalwand injiziert vom 30.6.—5.7. Ausfluss anfänglich keiner. 1.—7. wenig helle Flüssigkeit, die 3.—7. rot wurde und bis 6.—7. blieb. Es trat kein Libido gegenüber Rüden oder Hündin auf.	Beginn Oestrus Libido —. † 7 Tage nach der Injektion.
160 21/4-'39 geworfen	6	22	30.6.39	200 R.E.	3.—10.7.'39 geschwollene Vulva. Vaginalwand von 30.6.—8.7. injiziert. Ausfluss anfänglich schleimig. Am 2.7.—9.7. hellrot. Libido sexualis am 9. und 10.7. von Rüden und Hündin positiv. Coitus am 9. und 10. gestattet.	Oestrus +. Libido +. Coitus +. † 12 Tage nach der Injektion.
164	2	18	28.7.39	400 R.E.	Am 31.7.—3.8. leichte Schwellung der Vulva. Vaginalwand 28.7.—3.8. rosa. Kein Ausfluss, allein am 3.8. blutig. Libido am 3.8. von Rüden und Hündin positiv. Coitus nicht gestattet.	Sehr mässiger Oestrus. Libido +. † 7 Tage nach der Injektion.
165	6	21	28.7.39	400 R.E.	Am 31.7. leichte Schwellung, die am 2.8. mässig war und blieb bis 7.8. Vaginalwand rosa gefärbt, wurde am 31.7.—7.8. bleich. Kein Ausfluss bis 3.8., darauf 4.—7.8. blutiger Ausfluss. Libido sexualis von Rüden und Hündin vom 3.8.—7.8. positiv. Coitus am 5. und 6.8.'39 positiv.	Oestrus positiv Libido +. Coitus +. † 12 Tage nach der Injektion.
119 Bereits im Mei eingespritzt vor klinischer Beobachtung	4	125	4.8.39	600 R.E.	9.8. leichte Vulvaschwellung. Vaginalwand 5.8.—8.8. bleich, am 9.8. rosa Ausfluss. Ausfluss 9.8. allein leicht blutig, vorher kein Ausfluss. Libido negativ. Coitus nicht gestattet.	Oestrus mässig Libido —. Coitus —. † 12 Tage nach der Injektion.
162	2½	9	4.8.39	600 R.E.	8.8. leichte Schwellung, die bis 12.8. stets deutlicher wird. Vaginalwand rosa. Am 11.8. bleich rosa bis 15.8. Anfänglich kein Ausfluss. Am 9.8. leicht blutig, hält an bis zum 13.8. und nimmt ab. Libido von Rüden und Hündin zweifelhaft vom 9.—13.8. Coitus negativ.	Oestrus positiv Libido —. Coitus —. † 12 Tage nach der Injektion.
181	2	13	12.8.39	1000 R.E.	17.8. deutliche Schwellung. Vaginalwand anfänglich rosa, darauf am 16.8. bleich. Ausfluss 15.8. nur mässig und hell. Libido sexualis von Rüden und Hündin negativ. Coitus negativ.	Oestrus sehr schwach Libido —. Coitus —. † 7 Tage nach der Injektion.

deutlicher und auch die Ausscheidung wurde, nachdem sie einige Tage gelb, klar und gelbrot gewesen war, wieder deutlich hämorrhagisch. Am 21. 8. 39 wurde ein Coitus gestattet und am 5. 10. 39 wurden 5 normale Junge geboren. Eine etwaige Gestylwirkung halten wir nicht für unwahrscheinlich, weil vor der zweiten Injektion das Tier klinisch sich im Anoestrus befand.

Zusammenfassend gelangen wir zu der Schlussfolgerung, dass das Gestyl bei klinisch im Anoestrus befindlichen Hunden eine entschiedene Wirkung hat. Bei kleinerer Dosis war die Reaktion schwach, bei höherer Dosis wiesen die Tiere eine deutliche Brunst auf, während bei einzelnen Hunden der Libido sexualis positiv war und der Coitus gestattet wurde. In einem Fall glauben wir das Ovarium aktiviert zu haben, sodass nach einem Monat eine Gravidität auftrat. Das Tier warf 5 normale Junge.

Bei einer zweiten Gruppe von Tieren, die ebenso wie die vorigen Hunde sich im Anoestrus befanden, wurde einige Zeit vor der Einspritzung per Laparotomie das L. Uterushorn sowie das L. Ovarium entfernt. Die Daten der Injektionen sind auf den verschiedenen Tabellen II, III und IV angegeben. Wenn wir die klinischen Erscheinungen jener Tiere, die sämtlich 7 oder 12 Tage nach der Injektion getötet wurden, untersuchen, so fällt uns auf, dass bei einem (Hd. 181. Tab. II) der mit 1000 R. E. eingespritzten Tiere so wenige klinische Brunstsymptome ersichtlich sind. Zwar trat eine Schwellung der Vulva mit ihrer Verfärbung auf, doch eine hämorrhagische Ausscheidung, womit normaliter die Brunst verknüpft ist, unterblieb. Bei den andern Tieren traten die Brunsterscheinungen in wechselnder Stärke auf. Bei drei Hunden war der Libido sexualis positiv, zwei dieser Tiere gestatteten den Coitus. Ob die weniger starken Reaktionen auf die Tatsache zurückzuführen sind, dass die Tiere bereits nach 7—12 Tagen nach der Injektion getötet wurden, wissen wir nicht. Es ist nicht unmöglich, dass solches der Fall gewesen ist.

Veränderungen in den Ovaria.

Betrachten wir nun die Reaktionen des Gestyl auf die Ovaria jener Tiere, so sehen wir, wie solches in Tabelle III angegeben ist, dass die Gewichtsunterschiede jener Organe deutlich ersichtlich sind. Bei einigen Tieren war der Unterschied weniger deutlich, doch bei der Mehrzahl der Tiere variiert die Gewichtssteigerung 75 %—350 % ihres ursprünglichen Gewichtes. Wohl fällt auf, dass bei der Injektion, wobei bis 400 R. E. eingespritzt wurden, die Gewichtssteigerungen deutlicher waren als bei den Tieren, welche mit einer höheren Dosis behandelt wurden.

Das makroskopische Bild wies bei drei Hunden (163, 160 und 165) neben einer starken Vergrößerung des Ovariums, deutliches Vorhandensein vergrößerter Follikel auf. Beim ersten Tier schienen diese blau durch, doch erwiesen sich nicht als gebarsten. Bei Hund 165 wurde neben mittelgrossen Follikeln einzelne geplatze Follikel gefunden, worin makros-

TABELLE III. Ovariae der Tiergruppe, von der die klinischen Einzelheiten in II stehen.

Hund No.	Alter in Jahren	Gew. in kg.	Total eingespritzte Menge.	Gewicht des Ovar. vor Injektion	Gewicht des Ovar. nach Injektion.	Makroskopisch.	
						Vor Einspritzung l. und r. Ovar.	Nach Einspritzung l. und r. Ovar.
163 16.5.'39	2 geworfen.	13	200 R. E. 30.6.'39. Getötet 7 Tage nach Injektion.	0.5 g	1.3 g + 160%	Linkes Ovar. 2 Corpora lutea. Re. Ovar. 3 Corpora lutea.	Reste Corpora lutea blau schimmernd. Keine Ovula.
160 25.5.'39	6 geworfen.	22	200 R. E. 30.6.'39. Getöt. 12 Tage nach Injektion.	0.6 g	2.1 g + 350%	1 altes Corpus luteum.	Ovarien viel grösser. Follikel.
164	2	18	400 R. E. 28.7.'39. Getötet 7 Tage nach Injektion.	0.8 g	1.3 g ± 75%	3 Corpora lutea.	Keine reifen Follikel.
165	6	21	400 R. E. 28.7.'39. Getötet 7 Tage nach Injektion.	0.9 g	2.75 g ± 300%	5 Corpora lutea.	Stark vergrößerte Ovarien. grosse Follikel (Eindrücke). Corpus luteum webe sehr wesend.
119	4	12.5	600 R. E. 4.8.'39. Getötet 7 Tage nach Injektion.	0.5 g	0.651 g ± 30%	3 kleine Corpora lutea.	Einzelne kleine Corpora lutea.
162	2½	9	600 R. E. 4.8.'39. Getöt. 12 Tage nach Injektion.	0.650 g	0.710 g ± 9%	Einzelne kleine Corpora lutea.	
181	2	13	1000 R. E. 12.8.'39. Getöt. 12 Tage nach Injektion.	0.550 g	1 g ± 90%	Keine deutliche Follikel.	Keine deutliche Follikel. Einzelne Corpora lutea. Ovar etwas als unverändert.

Mikroskopisch.		Ergebnisse.
Vor der Einspritzung.	Nach der Einspritzung.	
Primär-, Sekundär- und kleine Tertiärfollikel, einige mit degenerierter Corpora luteum in beginnender Degeneration.	Primärfollikel grösser als im Ovarium vor der Injektion, Sekundär- und kleine Tertiärfollikel atretisch. Tertiärfollikel sind deutlich vergrössert. Granulosazellenschicht verdickt. Zellen von zylindrischer Form. Theca interna wenig Reaktion. Polynucleäre Leukozyten sind ausgetreten. In einzelnen Follikeln Granulosazellenschicht abgestossen. Corpora lutea sind in Degeneration. Keine Abweichungen in Stroma ovarii.	Leichte Reaktion der Primärfollikel. Tertiärfollikel stark gewachsen
Primär- und Sekundärfollikel, Tertiärfollikel, wovon viele atretisch. Einige degenerierte Corpora lutea.	Primärfollikel haben auch hier reagiert. Sekundärfollikel sind grossenteils atretisch. Tertiärfollikel beherrschen das Bild, sind stark vergrössert. Granulosazellenschicht verdickt, mit Ausstülpungen an verschiedenen Stellen, wo die Zellen von zylindrischer Form sind, geordnet auf Slavianskyschem Membran. Theca interna blutreich. Ab und zu Wucherung.	Tertiärfollikel reagieren stark, Sekundärfollikel atretisch. Auch hier Reaktion der Primärfollikel.
Einige Corpora lutea nehmen den Teil des Ovarium ein. Gewebeentwachsung hat bestanden. Unter Oberfläche Primärfollikel. Tiefer die Tertiärfollikel. Praktisch alle atretisch. Fehlen granulosa, degenerierte Eizellen. Viel Bindegewebe im Stroma.	Überwiegend Tertiärfollikel, wenige Primärfollikel, die etwas grösser geworden sind. Sekundärfollikel weisen Atresie auf. Tertiärfollikel deutlich gewachsen. Die Granulosazellenschicht weist auch hier zylindrisch geordnete Zellen mit der Basis auf Slavianskyschem Membran auf. Theca besteht aus jungen Zellen. Gefässe gut gefüllt. An verschiedenen Stellen Austreten polynucleärer Leukocyten.	Tertiärfollikel reagieren stark. Sekundärfollikel atretisch. Reaktion der Primärfollikel.
Corpora lutea in jungen Stadien. Einiges Einwachsen von Bindegewebe. Zellen in Degeneration. Primär- und Tertiärfollikel in Ruhe. Hierin degenerierte Eizellen. Stroma ovarii mit Degeneration der Gefässwand.	Heftige Reaktion der Tertiärfollikel. Verschiedene Follikel weisen Verdickung der Granulosazellenschicht auf; einige Zellen zylindrisch geordnet. In andern Follikeln losmaschiges Anwachsen und baumförmige Ausstülpung. In einzelnen Follikeln hat die Bildung von Luteinzellen stattgefunden. Diese Zellen weisen grosse Ähnlichkeit mit den normalen Luteinzellen auf. Die älteren Corpora lutea sind zurückgegangen.	Tertiärfollikel reagieren stark. Sekundärfollikel atretisch.
Ovarium in Ruhe. Zahlreiche Primär- und kleine Sekundärfollikel. Einzig kleiner Tertiärfollikel. Corpora luteum.	Einzelne ältere Corpora lutea. Es gibt wenige Primärfollikel. Sekundärfollikel sind überwiegend atretisch. Einige mit degenerierten Eizellen. Tertiärfollikel weisen eine Verdickung der Granulosazellenschicht auf.	Wenig Reaktion auf die Gestaltinfektion.
Ovarium in Ruhe, wenige Primärfollikel. Sekundärfollikel in Atresie. Einige Corpora lutea.	Überwiegendes Wachstum der Tertiärfollikel. In verschiedenen Lamina zylindrisch geordnete Granulosazellen. An einigen Stellen sind die Granulosazellen einzelne Schichten dick. In einigen Tertiärfollikeln fehlt die ganze Granulosazellenschicht, während bei einzelnen degenerierte Eizellen vorhanden sind.	Reaktion vor allem auf die Tertiärfollikel.
Einige Corpora lutea mit Bindegewebe durchwachsen. Primär- und Sekundärfollikel. Tertiärfollikel. Letztere beide überwiegend atretisch.	4 sehr junge Corpora lutea, worin junge Elemente in Teilung sich befinden. Man erhält hier den Eindruck, dass die Kerne jünger sind. Tertiärfollikel sind atretisch; einzelne Sekundärfollikel.	Reaktion auf die Corpora lutea.

kopisches, Corpus luteumartiges Gewebe vorhanden war. Ob dieses Platzen infolge der Gestylbehandlung stattfand oder ob dasselbe auf operatives Eingreifen zurückzuführen ist, können wir nicht mit Sicherheit sagen. Das Vorhandensein des Gewebes, das normalem Corpus luteum ähnlich sah, kann eine vor der Operation aufgetretene Ovulation vermuten lassen. Wie wir bereits bei der Gewichtszunahme sagten, weisen die Ovaria der Tiere, die mit grösseren Mengen Gestyl behandelt worden sind, makroskopisch viel weniger deutliche Unterschiede auf als die Tiere, bei denen 200—400 R. E. eingespritzt wurden.

Betreffs des mikroskopischen Bildes der Ovaria vor der Operation sei erwähnt, dass in 4 Fällen das Ovarium sich im völligen Ruhestadium befand, während bei drei Tieren Corpora lutea jungen Alters gefunden wurden. Die primären und sekundären Follikel befanden sich auch hier in einem Ruhestadium, während die tertiären Follikel eine Atresie aufwiesen und einige eine degenerierte Eizelle enthielten.

Nach der Behandlung mit 200 R. E. Gestyl waren bereits schöne Veränderungen ersichtlich. Beim Studium der mikroskopischen Praeparate war die Vergrösserung der tertiären Follikel deutlich. Die Granulosazellenschicht war in vielen Follikeln verdickt, während die Granulosazellen zylindrisch auf der Basalmembran geordnet waren. Bei dem mit 400 R. E. behandelten Hund wies die Granulosazellenschicht ebenfalls eine deutliche Verdickung auf. Hier wurden in den Follikeln ein losmaschiges Anwachsen mit baumartigen Ausstülpungen, welche wir früher bei Pregnylinjektionen ebenfalls beschrieben, angetroffen. In den Ovaria der Tiere, welche mit einer grösseren Dosis Gestyl behandelt wurden, sagen wir gleiche Bilder, wie oben erwähnt, nämlich Follikel mit einer verdickten Granulosa, die manchmal eigenartig gewuchert war neben Follikeln, wo eine Granulosazellenschicht völlig fehlte.

Was die Reaktion der Theca angeht, so können wir mitteilen, dass bei 200 R. E. Gestyl in der Theca interna geringe Reaktion angetroffen wurde, allein wurde da und dort extravasal gelegene polynucleäre Leukocyten angetroffen.

Beim zweiten Hund (160), der 200 R. E. erhielt, wurde eine grössere Blutfülle der Theca interna beobachtet, während dort jüngere Bindegewebszellen angetroffen wurden. Dies war noch mehr der Fall mit der Theca des Hundes 164, der mit 400 R. E. Gestyl behandelt worden war. Hier bestand die Theca interna aus jungen Bindegewebelementen, während stark gefüllte Gefässe vorhanden waren und einzelne Stellen polynucleärer Leukocyten extravasal angetroffen wurden. Eine noch schönere Reaktion wies der bereits oben erwähnte Hund 165 auf, der neben Follikeln mit „baumartigen“ Ausstülpungen auch Follikel zeigte, worin Bildung von Luteinzellen stattgefunden hatte. Ein ganz anderes Bild zeigte Hund 181. Dieses Tier, das mit 1000 R. E. eingespritzt worden war, wies im Ovarium, das 4 Tage vor der Injektion weggenommen worden war, einzelne jüngere Corpora lutea auf. Die Corpora lutea des 1. Ovariums,

das 7 Tage nach der Injektion untersucht wurde, enthielten viele junge Zellen, welche sich in Teilung befanden. In diesem Ovarium bestand ein Gegensatz zu dem, was wir bei andern fanden, kein Anwachsen der Tertiärfollikel. Die vorhandenen Follikel waren klein und befanden sich alle in Atresie. Es hat hier offenbar mit der grossen Menge eingespritzten Gestyls eine Veränderung im Corpus luteum stattgefunden, während dies bei andern Tieren, wie bei Hund 165, nicht der Fall war. Denn dieser war mit 400 R. E. behandelt und hier wurden neben heftigen Reaktionen auf die Tertiärfollikel einzelne mit Corpus luteumartigen Zellen gefunden. Auf Grund dieser Erfahrungen glauben wir, dass diese grosse Gestyldosis unmittelbar auf das junge, eben in Degeneration befindliche Corpus luteum eingewirkt hat.

Was die sekundären Follikel angeht, so genügt es zu sagen, dass diese überwiegend atretisch angetroffen wurden, wovon einige eine Eizelle einschlossen. Die Primärfollikel wiesen in einzelnen Präparaten eine leichte Reaktion auf, namentlich bei geringer Gestyldosis (200 R. E.) sahen wir grössere Reaktion seitens der Primärfollikel. Bei grösserer Dosis wurde jedoch nicht die geringste Vergrösserung derselben beobachtet.

Fassen wir alles zusammen, so kommen wir zu der Schlussfolgerung, dass das Gestyl bei einmaliger intramuskulärer Injektion, eine deutliche Reaktion im Ovarium ergibt. Die Wirkung geschieht vor allem auf die Tertiärfollikel, von denen fast alle atretisch waren, während die sekundären stets atretisch waren. Bei kleinerer Dosis wurde mehr von der Wirkung beobachtet als bei der Einspritzung von grösseren Mengen zugleich. Die Primärfollikel wies bei niedriger Dosis ein leichtes Anwachsen auf. Bei einem der Tiere, das mit 1000 R. E. eingespritzt worden war, wurden Corpora lutea angetroffen, deren Zellkerne sich deutlich in Teilung befanden und wovon man den Eindruck erhielt, dass hier eine Wirkung auf die Corpus luteumzellen stattgefunden hatte. Die Tertiärfollikel waren in diesem Ovarium nicht gewachsen und befanden sich sämtlich in Atresie.

Veränderungen in den Uterus.

Nachdem wir nun die Wirkung des Gestyls auf das Ovarium des Hundes in grossen Linien untersucht haben, wollen wir weiterhin die Veränderungen einmal näher betrachten, die im Uterus vor sich gegangen sind. In Tabelle IV sind die verschiedenen Einzelheiten angegeben. Die Uterusschleimhaut zeigte vor den Injektionen bei Hd. 163, der am 16. 5. 39 Junge geworfen hatte, ein Bild einer Schleimhaut im Verfall. Grosse Konglomerate Zellen waren im Uteruslumen abgestossen, während in der Tiefe ein dichtes Stroma vorhanden war, das keine Zeichen irgendwelcher Aktivität aufwies. Nach der Injektion von 200 R. E., die, wie wir oben bei der Besprechung der Veränderungen im Ovarium bemerkten, ein deutlichsein der Follikel hervorrief, erwies sich die Epithelbekleidung der Uterusschleimhaut an verschiedenen Stellen als deutlich zylindrisch geworden zu sein. Das Stroma war losmaschiger, während die hierin vorhandenen Drüsenröhren ein weiteres Volumen aufwiesen. Die Wandauskleidung bestand aus schönem Zylinderepithel. Einige Drüsen waren gestreckt oder sägeförmig. Wir sahen hier eine im Rückgang befindliche Schleimhaut

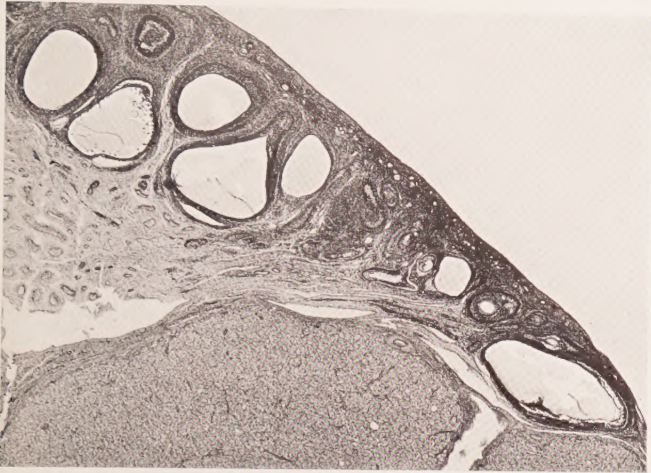
wieder in eine Schleimhaut im Proliferationsstadium sich verändern. Auch bei den Hunden 160, 164, 165 und 162 war die Reaktion deutlich ersichtlich. Die Uterusschleimhaut befand sich hier ebenfalls in deutlichem Proliferationsstadium. Neben schönem Zylinderepithel mit Kryptenbildung wurde ein losmaschiges Stroma gefunden, das viele junge Bindegewebs-elemente enthielt. In diesem Stroma wurde eine Vermehrung von Drüsen gefunden, deren Lumina mit schönem Zylinderepithel bekleidet waren und worin Eiweissubstanzen angetroffen wurden. Doch war in keinem der Praeparate eine Spur von einer Sekretionssphase zu entdecken. Bei Hund 119 wurden im Lumen des Uterus cystös geschwollene Drüsenröhren angetroffen. Bei Hund 181, welcher mit 1000 R. E. Gestyl behandelt worden war und bei dem im Ovarium überhaupt kein Anwachsen der Tertiärfollikel ersichtlich war, sondern eine Veränderung im Corpus luteum, sahen wir, dass die Uterusschleimhaut in Proliferation sich befand mit stellenweise subepithelialen Blutungen. Eine deutliche Erklärung für die eigenartige Reaktion im Ovarium, während im Uterus sich ein Proliferationsstadium entwickelte, können wir nicht geben.

Schliesslich wurde bei einem Hund (183), der am 19. 12. 39, 400 R. E. Gestyl erhielt, und deutliche klinische Symptome, wie Läufigkeit, rote Ausscheidung und Libido sexualis aufwies, 11 Tage nach der Einspritzung des 1. Ovarium und das 1. Uterushorn entfernt. Das Ovarium wies bei der Operation vier vergrösserte Follikel auf, die mikroskopisch mit den bereits beschriebenen Bildern übereinstimmten. Vor allem ein Anwachsen der Tertiärfollikel bestand, die sämtlich eine verdickte Granulosazellenschicht enthielten. Diese Granulosazellen standen auch hier zylindrisch auf der Basalmembran geordnet. Die Uterusschleimhaut wies ein deutliches Bild des Proliferationsstadiums auf mit stellenweise subepithelialen Blutungen. 22 Tage nach der Injektion wurde das r. Ovarium und das r. Uterushorn entfernt. Das Ovarium enthielt hier viele Corpora lutea. Hierin waren unregelmässig geordnete Zellen vorhanden, deren Konturen vag waren. Die Form der Zellen war meist rund bis ovalrund und sie enthielten Kerne, von denen verschiedene sich in Teilung befanden. An mehreren Stellen wurden junge Bindegewebs-elemente angetroffen. In den Corpora lutea sahen wir das früher bei normalen Corpora lutea beschriebene myxoematöse Gewebe auftreten. Die innere Grenze nach dem Follikellumen hin wurde durch die Reste der Basalmembrane gebildet. Von Granulosazellen war im übrigen Teil des Lumens nichts zu sehen. Die Gefässversorgung dieser jungen Corpora lutea war sehr gut im Gegensatz zu dem, was wir nach den Einspritzungen von Pregnyl entstehen sahen. Einer der Follikel des Ovariums war cystös degeneriert, doch die darum hin laufende Thecazellenschicht wies ebenfalls deutliche Reaktion auf. Die Uterusschleimhaut erwies sich 22 Tage nach der Injektion noch als sehr gut entwickelt. Die Epithelbekleidung war hoch, während deutliche Cryptenbildung vorhanden war. Im Stroma mit seinen vielen jungen Zellen sind die Drüsen leicht

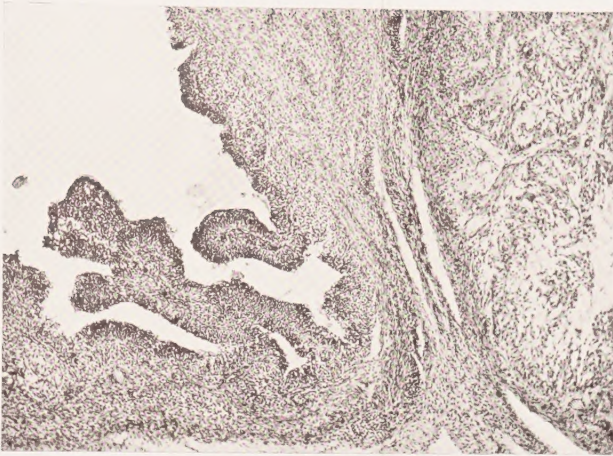
TABELLE IV.

Hund Nr.	Alter in Jahren	Gew. in kg	Datum der Injektion	Einge- spritzte Menge	Klinischer Verlauf	Uterus vor der Einspritzung	Uterus nach der Einspritzung	Reaktion
163 16.5.39.	2	13	30.6.39. Getötet 7 Tage nach Injekt.	200 R.E.	Beginnender Oestrus.	Uteruslumen gefüllt mit Konglomeraten degenerierter Zellen imitieren fibrinartiger Substrat. In Tiefe Stromareste von Drüsenröhren mit niedrigem Epithelschicht. Stroma dicht, einige Stellen pigment. Viele polynucleäre Leukocyten und Lymphocyten.	Konglomerate von fibrinartiger Substanz. Rest des Lumens weist Kryptenbildung auf. Lumen bedeckt mit Zylinderepithel. Im Stroma Drüsenröhren, die erweitert sind, bekleidet mit Zylinderepithel. Einige Drüsen sägeförmig oder gestreckt. Kleinzelige Infiltrate im Stroma.	Schleimhaut wird aufgebaut wie im Oestrus. Beginnendes Proliferationsstadium.
160	6	22	10.6.39. Getötet 12 Tage nach Injekt.	200 R.E.	Oestrus +. Libido +. Coitus +.	Schleimhaut im Rückgang, niedrig. Stroma dicht, Drüsenröhren wenig entwickelt. Epithel der Drüsenröhren niedrig. Im Stroma Pigmentauflagerungen und Herde von polynucleären Leukocyten und Lymphocyten.	Schleimhaut verdickt. Schleimhaut größtenteils bedeckt mit Zylinderepithel mit basal gelegenen Kernen. Im losmaschigen Stroma viele junge Bindegewebszellen. Mässige Anzahl Drüsen. Epithelbekleidung ist zylindrisch, mit basal gelegenen Kernen. Lumina leicht erweitert.	Deutliche Reaktion auf die Schleimhaut. Proliferationsstadium.
164	2	18	28.7.39. Getötet 7 Tage nach Injekt.	400 R.E.	Mässiger Oestrus. Libido +.	Weiters Uteruslumen. Zylindrisches Epithel. Viele Krypten. Stroma enthält enge Drüsenröhren. Stroma mit alten Bindegewebszellen. Ist oedematos, Gefässe gefüllt.	Schleimhaut verdickt. Uteruslumen weit. Kryptenbildung deutlich. Drüsen wenig zugenommen. Lumina weiter, gefüllt mit Eiweissubstanzen. Stroma mässig, junge Bindegewebszellen.	Reaktion der Schleimhaut anwesend. Proliferationsstadium.
165	4	21	28.7.39. Getötet 12 Tage nach Injekt.	400 R.E.	Oestrus +. Libido +. Coitus +.	Lumen mit niedriger Schleimhaut. Wenig Krypten. Stroma dicht mit vielen kleinen Röhren. An einzelnen Stellen Pigmentauflagerung im wenig entwickelten Stroma.	Schleimhaut verdickt. Epithel zylindrisch. Kryptenförmig. Vermehrung von Drüsen. Einige sägeförmig. Drüsenröhren mit Zylinderepithel. Lumina gefüllt mit Eiweissubstanz. Stroma voll junger Zellen. Im Stroma polynucleäre Leukocyten und Lymphocyten. Phagocytose von Pigment.	Reaktion der Schleimhaut anwesend. Proliferationsstadium.
119	4	12.5	4.8.39. Getötet 7 Tage nach Injekt.	600 R.E.	Oestrus mässig. Libido —. Coitus —.	Weiters Lumen mit niedriger Schleimhaut. Epithel zylindrisch. Stroma mit alten Bindegewebszellen. Drüsen in mässiger Zahl anwesend. Epithel der Drüsen abgeplattet. Im Lumen und an verschiedenen Stellen Schleimhaut aus losmaschiger Struktur. Protoplasma schlecht farbbar.	Uteruslumen sehr weit. Schleimhaut ist zu schmaler Schicht reduziert. Die Ausstülpungen sind deutlicher. Geschwollene Drüsenröhren sind hierbei anwesend. Im Lumen eiweissartige Substanzen.	Reaktion der Schleimhaut anwesend. Proliferationsstadium.
162	2½	9	4.8.39. Getötet 12 Tage nach Injekt.	600 R.E.	Oestrus +. Libido —. Coitus —.	Niedriges Epithel. Dichtes Stroma mit alten Bindegewebszellen. Wenige oder keine Drüsenröhren. Epithel der Drüsenröhren zylindrisch. Kerne basal gelegen. Im Stroma Pigmentauflagerungen.	Schöne Verdickung der Schleimhaut mit Zylinderepithel. Viele Kryptenbildung. Im Stroma viele Drüsenröhren mit ziemlich weiten Lumina; ab und zu sägeförmige Drüsenröhren mit Zylinderepithel bekleidet. Stroma oedematos mit jungen Zellen. Altes Blut ist phagocytisiert.	Reaktion der Schleimhaut anwesend. Proliferationsstadium.
181	2	13	12.8.39. Getötet 7 Tage nach Injekt.	1000 R.E.	Oestrus sehr schwach. Libido —. Coitus —.	Epithelauskleidung der Schleimhaut befindet sich in Degeneration. Im Stroma alte Fibroblasten. Viele Drüsenelemente mit Zylinderepithel bedeckt (in Degeneration). Im Stroma Blutungen.	Einzelne Kryptenbildung. Zylinderepithelbekleidung höher. Drüsen im Stroma vermehrt, mit Zylinderepithel bedeckt. Im Stroma, das oedematos ist, junge Fibroblasten. Unter der Epitheldecke des Lumens an einzelnen Stellen Blutungen.	Reaktion der Schleimhaut deutlich. Proliferationsstadium.

Die Reaktionen mit der verschiedenen Gestylosis sind vorhanden. Überall wird Proliferationsstadium erreicht; weiter kommt jedoch die Umbildung der Schleimhaut nicht. (Nirgendes Andeutung einer Sekretionsphase (kann auch nicht am 7.—12. Tag).



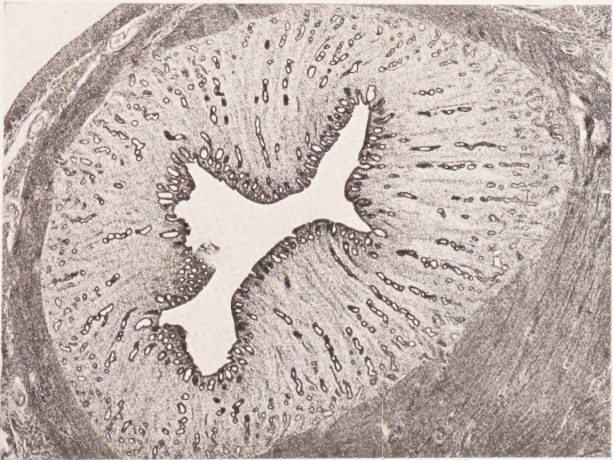
Hund 164. Ovarium vor Gestylbehandlung. 20 X.



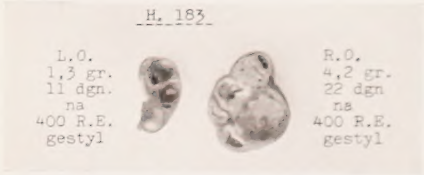
Hund 165. Ovarium nach Behandlung 400 R. E. Gestyl. 20 X,
12 Tage nach Injektion.



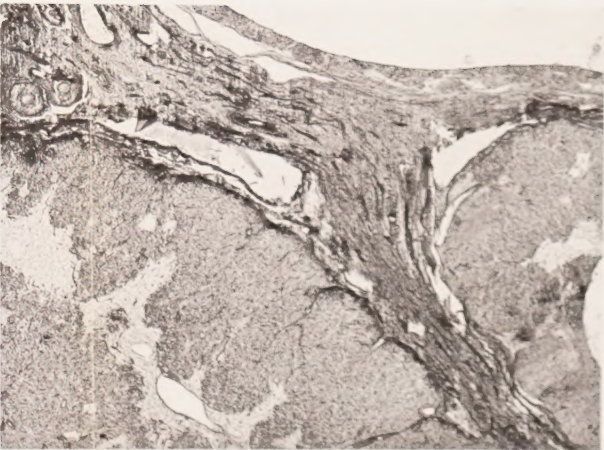
Hund 164. Ovarium nach Gestylbehandlung. 20 X.



Hund 164. Uterus nach 400 R. E. Gestyl. 20 X. 7 Tage nach Injektion.



Hund 183. Ovarium 11 und 22 Tage nach Injektion
400 R. E. Gestyl. 20 X.



Hund 183. Ovarium 22 Tage nach Injektion 400 R. E. Gestyl. 20 X.

geschlängelt und ihre Lumina mit hohem Zylinderepithel bekleidet, dessen Kerne basal gelegen sind. Eine deutliche Sekretionssphase wurde jedoch nicht beobachtet.

Bei obengenanntem Tier sahen wir, dass eine Gestylwirkung 12—13 Tage nach der Injektion einen Einfluss entfaltete. In dieser Zeit wurde dreimal ein Coitus gestattet. 22 Tage nach der Einspritzung zeigte sich, dass eine schöne Luteinisation der Follikel entstanden war. Das Corpus luteumgewebe war, was den Bau angeht, dem normalen Corpus luteum sehr ähnlich, doch seine Funktion auf die Uterusschleimhaut war nicht dergestalt, dass hier eine Sekretionssphase entstand.

Wenn wir die Ergebnisse unserer Versuche mit Gestyl an infantilen und erwachsenen Hunden im Anoestrus zusammenfassen, so glauben wir die folgenden Schlussfolgerungen ziehen zu dürfen:

I. Bei infantilen Tieren wurde klinisch wenig beobachtet. Mikroskopisch wiesen die Ovaria, namentlich nach intravenöser Verabreichung des Gestyls ein Anwachsen der Primärfollikel auf. Auch die Uterusschleimhaut erwies sich unter dessen Einfluss als verändert.

II. Die erwachsenen Hunde reagierten alle gut auf die Gestylinjektionen. Klinisch zeigten die Tiere die Symptome der Brunst. In einigen Fällen trat einen Monat nach der Injektion eine Gravidität auf, welche wir unserer Meinung nach dem durch Gestyl auf das Ovarium ausgeübten Reiz zuschreiben dürfen, das im Ruhestadium sich befand und dadurch in Funktion trat und blieb.

III. Bei einer anderen Gruppe Hunde, bei denen wir die Veränderungen in den Ovaria und im Uterus untersuchten, sahen wir, dass die grösste Wirkung bei den Tertiärfollikeln zu Tage trat. Reifung der Tertiärfollikel trat nicht auf. Viele Follikel nahmen an Grösse zu, aber alle wiesen mehr oder weniger Erscheinungen von Atresion und Degeneration auf. Die sekundären Follikel waren sämtlich atretisch. Die Primärfollikel wiesen bei der Einspritzung einer niedrigen Dosis ein leichtes Anwachsen auf.

IV. Durch die Injektion von 1000 R.E. sahen wir in einzelnen Corpora lutea eine Verjüngung der Zellen entstehen, während ferner alle andern Follikel atretisch waren.

V. Der Uterus wies bei allen Tieren ein Proliferationsstadium der Schleimhaut auf. Deutliche subepitheliale Blutungen wurden nur einmal beobachtet und zwar dort, wo eine hohe Gestyldosis verabreicht worden war. Wohl wurden sämtliche Tiere 7—12 Tage nach der Injektion getötet, sodass es möglich war, dass ebengenannte Blutungen später auftraten.

VI. Bei einem Tier wurde 12 Tage nach der Injektion die erste Operation vorgenommen, während 22 Tage nach der Einspritzung die zweite folgte. Hier sahen wir in den bei dem zweiten Eingriff erhaltenen Ovaria schöne Corpora lutea, die im Bau den normalen Corpora lutea glichen. Die Uterusschleimhaut konnte jedoch den Veränderungen, welche in den Ovaria eingetreten waren, nicht folgen. Ein Sekretionsstadium wurde nicht erreicht.

Geology. — *Tektonik und Magma in der Insel Celebes und der indonesische Gebirgstypus.* By H. A. BROUWER.

(Communicated at the meeting of February 22, 1941.)

ERRATUM.

Seite 256. Unterschrift der Fig. 2, Zeile 2, lies westlich statt östlich.

Seite 258. Fusznote 3 letzte Zeile lies 1934 statt 1929.
